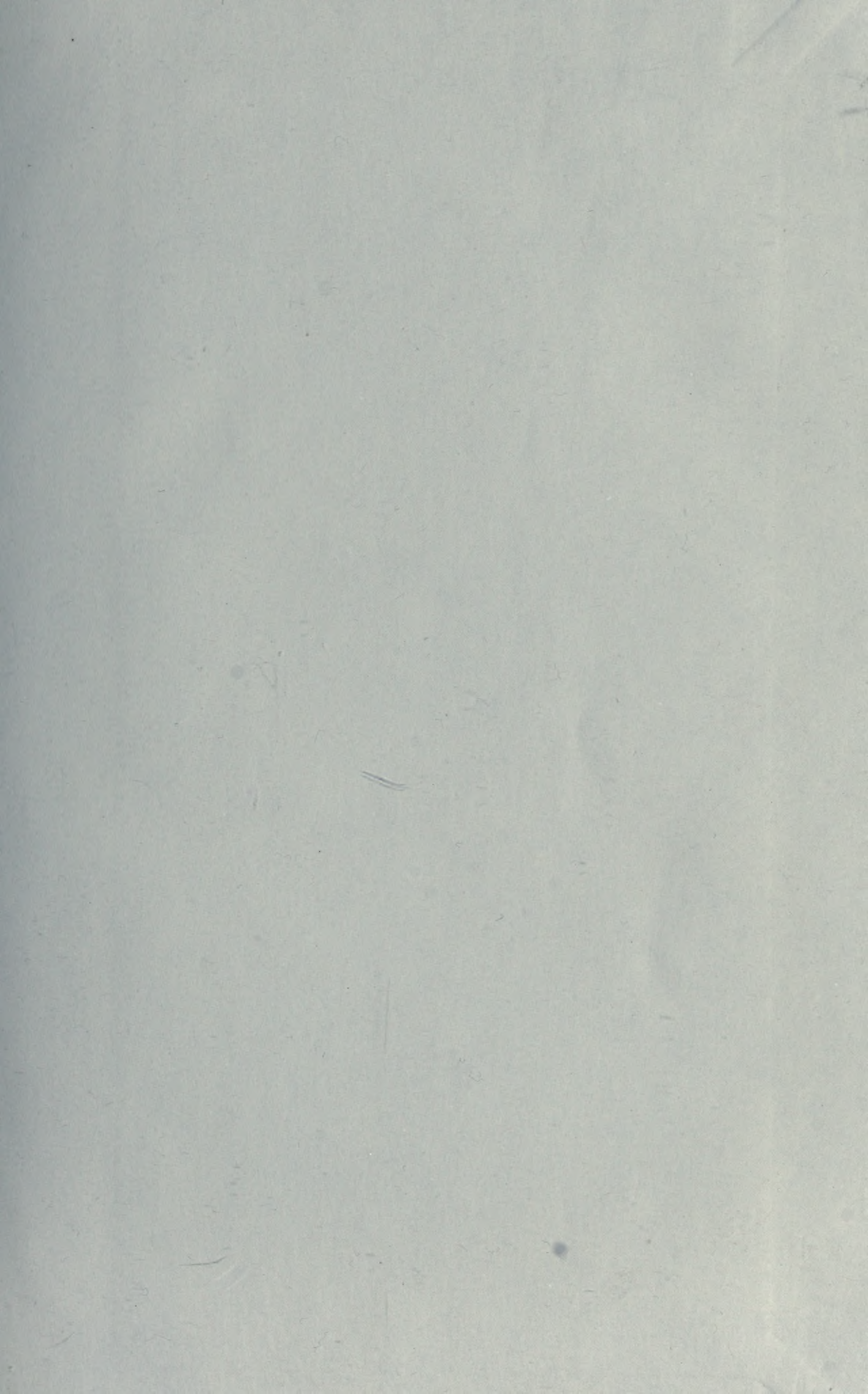
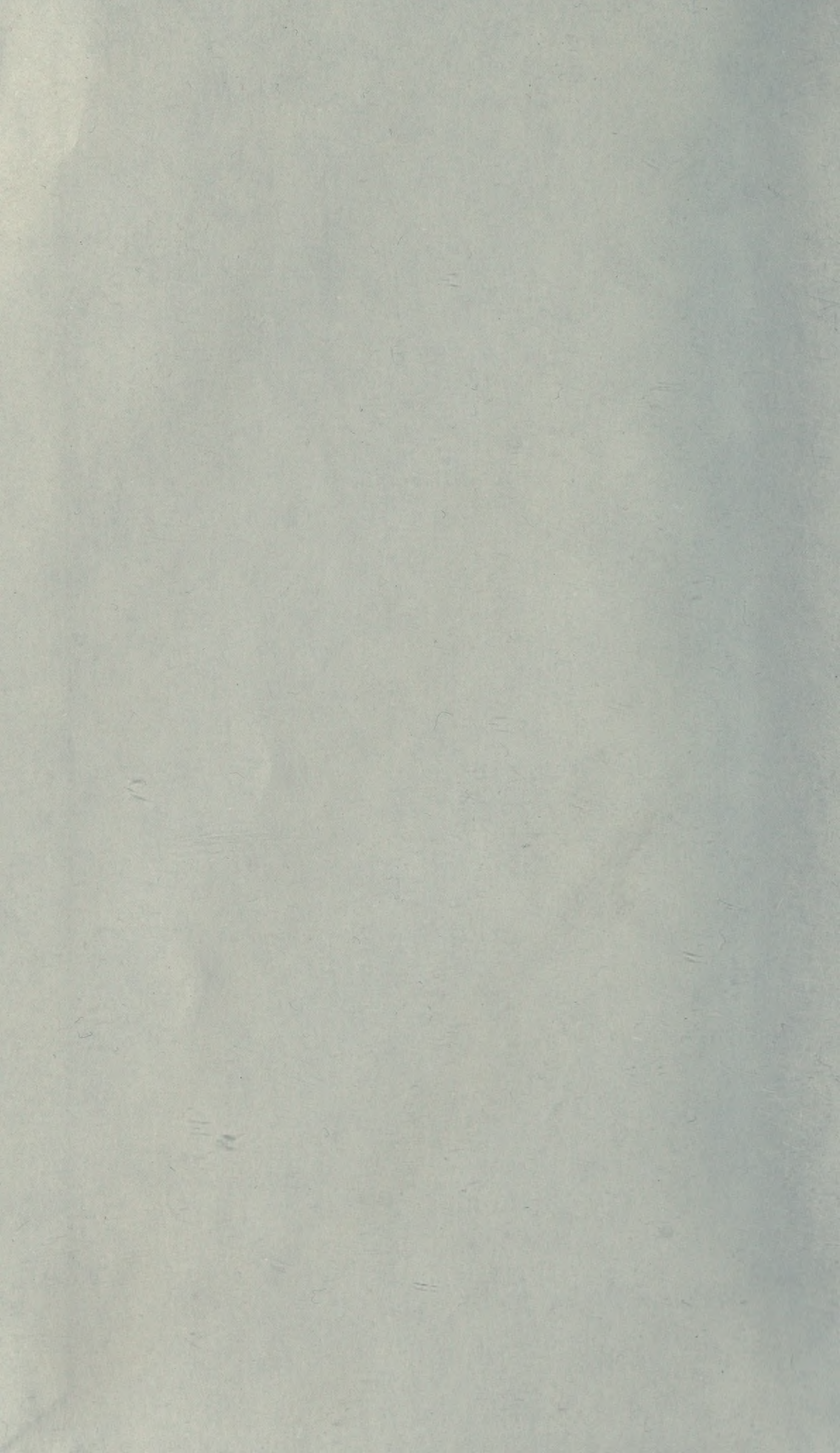
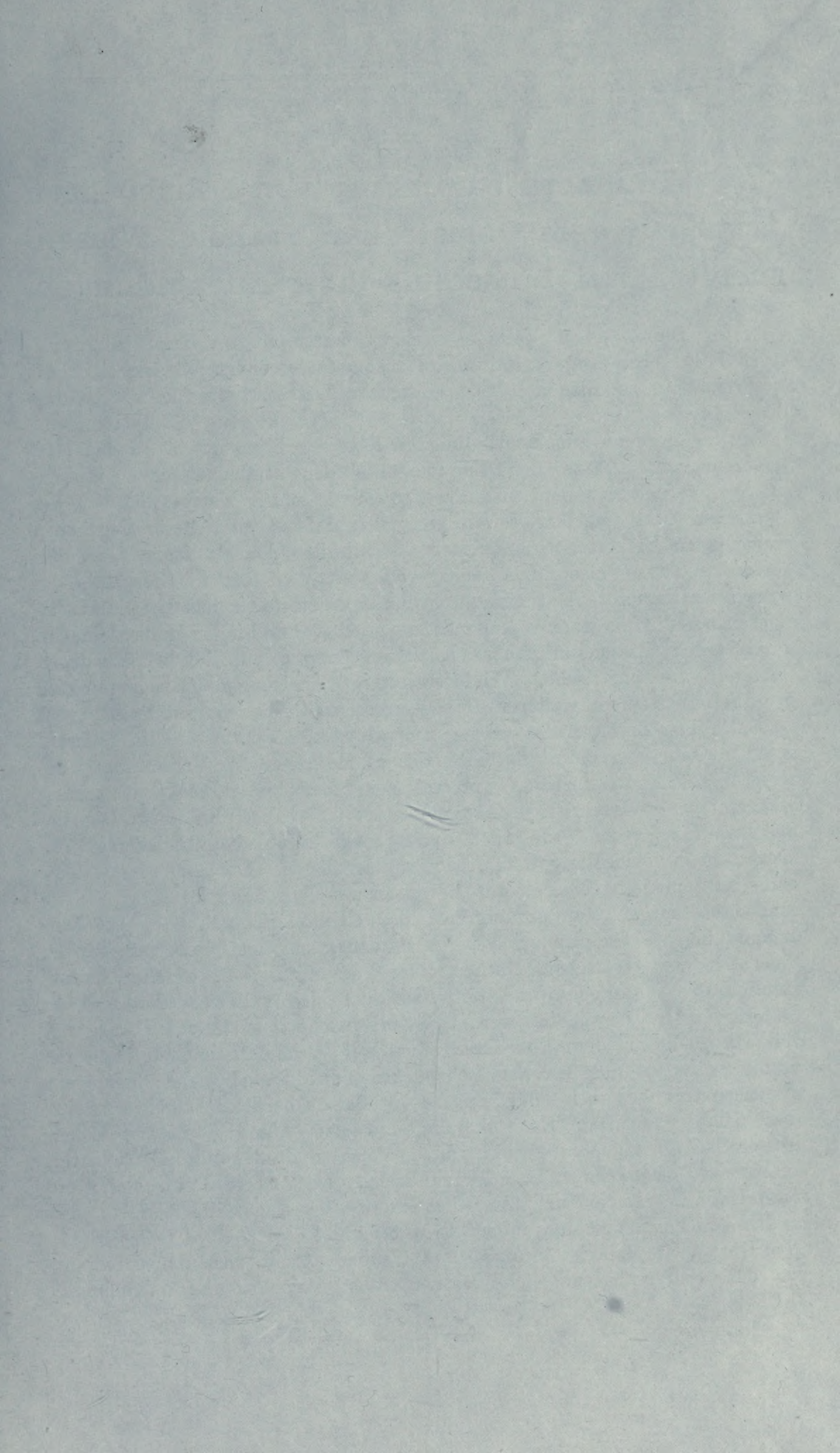

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01025928 1









Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathem. Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen.

Im Teubnerschen Verlage erscheint unter obigem Titel in zwangloser Folge eine längere Reihe von zusammenfassenden Werken über die wichtigsten Abschnitte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen.

Die anerkennende Beurteilung, welche der Plan, sowie die bis jetzt erschienenen Aufsätze der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften gefunden haben, die allseitige Zustimmung, welche den von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veranlafsten und herausgegebenen eingehenden Referaten über einzelne Abschnitte der Mathematik zu teil geworden ist, beweisen, wie sehr gerade jetzt, wo man die Resultate der wissenschaftlichen Arbeit eines Jahrhunderts zu überblicken bemüht ist, sich das Bedürfnis nach zusammenfassenden Darstellungen geltend macht, durch welche die mannigfachen Einzelforschungen auf den verschiedenen Gebieten mathematischen Wissens unter einheitlichen Gesichtspunkten geordnet und einem weiteren Kreise zugänglich gemacht werden.

Die erwähnten Aufsätze der Encyklopädie ebenso wie die Referate in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung beabsichtigen in diesem Sinne in knapper, für eine rasche Orientierung bestimmter Form den gegenwärtigen Inhalt einer Disciplin an gesicherten Resultaten zu geben, wie auch durch sorgfältige Litteraturangaben die historische Entwickelung der Methoden darzulegen. Darüber hinaus aber mufs auf eine eingehende, mit Beweisen versehene Darstellung, wie sie zum selbständigen, von umfangreichen Quellenstudien unabhängigen Eindringen in die Disciplin erforderlich ist, auch bei den breiter angelegten Referaten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in welcher hauptsächlich das historische und teilweise auch das kritische Element zur Geltung kommt, verzichtet werden. Eine solche ausführliche Darlegung, die sich mehr in dem Charakter eines auf geschichtlichen und litterarischen Studien gegründeten Lehrbuches bewegt und neben den rein wissenschaftlichen auch pädagogische Interessen berücksichtigt, erscheint aber bei der raschen Entwickelung und dem Umfang des zu einem grofsen Teil nur in Monographien niedergelegten Stoffes durchaus wichtig, zumal, im Vergleiche z. B. mit Frankreich, bei uns in Deutschland die mathematische Litteratur an Lehrbüchern über spezielle Gebiete der mathematischen Forschung nicht allzu reich ist.

Die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner giebt sich der Hoffnung hin, dafs sich recht zahlreiche Mathematiker, Physiker und Astronomen,

Geodäten und Techniker, sowohl des In- als des Auslandes, in deren Forschungsgebieten derartige Arbeiten erwünscht sind, zur Mitarbeiterschaft an dem Unternehmen entschliefsen möchten. Besonders nahe liegt die Beteiligung den Herren Mitarbeitern an der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Die umfangreichen litterarischen und speziell fachlichen Studien, welche für die Bearbeitung von Abschnitten der Encyklopädie vorzunehmen waren, konnten in dem notwendig eng begrenzten Rahmen nicht vollständig niedergelegt werden. Hier aber, bei den Werken der gegenwärtigen Sammlung, ist die Möglichkeit gegeben, den Stoff freier zu gestalten und die individuelle Auffassung und Richtung des einzelnen Bearbeiters in höherem Mafse zur Geltung zu bringen. Doch ist, wie gesagt, jede Arbeit, die sich dem Plane der Sammlung einfügen läfst, im gleichen Mafse willkommen.

Bisher haben die folgenden Gelehrten ihre geschätzte Mitwirkung zugesagt, während erfreulicherweise stetig neue Anerbieten zur Mitarbeit an der Sammlung einlaufen, worüber in meinen „Mitteilungen" fortlaufend berichtet werden wird:

P. Bachmann, niedere Zahlentheorie.

M. Bôcher, über die reellen Lösungen der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

G. Bohlmann, Versicherungsmathematik.

G. H. Bryan, Lehrbuch der Thermodynamik.

G. Castelnuovo und **F. Enriques,** Theorie der algebraischen Flächen.

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung.

L. E. Dickson, Linear Groups with an exposition of the Galois Field theory. [In englischer Sprache. Erschienen.]

F. Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.

F. Dingeldey, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung.

G. Eneström (in Verbindung mit andern Gelehrten), Handbuch der Geschichte der Mathematik.

F. Enriques, Prinzipien der Geometrie.

Ph. Furtwängler, die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen. [Unter der Presse.]

A. Gleichen, Optische Abbildungslehre u. Theorie der optischen Instrumente.

M. Grübler, Lehrbuch der hydraulischen Motoren.

J. Harkness, elliptische Funktionen.

L. Henneberg, Lehrbuch der graphischen Statik.

K. Heun, die kinetischen Probleme der modernen Maschinenlehre.

G. Jung, Geometrie der Massen.

G. Kohn, rationale Kurven.

A. Krazer, Handbuch der Lehre von den Thetafunktionen.

H. Lamb, Akustik.

R. v. Lilienthal, Differentialgeometrie.

B. G. TEUBNER'S SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BAND IV, 2.

THEORETISCHE ARITHMETIK

VON

DR. OTTO STOLZ
O. PROFESSOR A. D. UNIVERSITÄT INNSBRUCK.

UND

DR. J. A. GMEINER
A. O. PROF. A. D. DEUTSCHEN UNIVERSITÄT PRAG.

II. ABTHEILUNG.

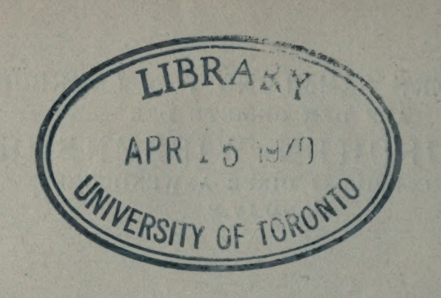
DIE LEHREN VON DEN REELLEN UND VON DEN COMPLEXEN ZAHLEN.

ZWEITE UMGEARBEITETE AUFLAGE
DER ABSCHNITTE V—VIII, X, XI DES I. UND I, II, V DES II. THEILES
DER VORLESUNGEN UEBER ALLGEMEINE ARITHMETIK VON O. STOLZ.

MIT NEUNZEHN FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.


LIBRARY
APR 15 1970
UNIVERSITY OF TORONTO



Vorrede.

Arithmetik hat hier die nämliche Bedeutung wie früher „allgemeine“ Arithmetik (Arithmetica universalis oder speciosa); es ist also damit die Lehre vom Rechnen mit den durch Buchstaben (species) dargestellten reellen und gemeinen complexen Zahlen gemeint. Das Beiwort „universalis“ hat indess in der letzten Zeit einen anderen Sinn angenommen, indem Sylvester u. A. unter „universal“ Algebra die Lehre von den Grössen und Zahlen im weitesten Sinne dieser Worte verstehen. Dem gegenüber ist die ehemalige „allgemeine“ Arithmetik zur „gewöhnlichen“ oder „gebräuchlichen“ geworden.

Wir wollen aber die reellen und gemeinen complexen Zahlen nicht bloss für sich, sondern als Unterarten allgemeinerer Begriffe, der Grösse und des complexen Zahlensystemes aus beliebig vielen Einheiten, betrachten. Demnach werden auch diese Gegenstände die Untersuchung bilden und zwar soll dieselbe bis dahin geführt werden, wo die Zahlenarten der gewöhnlichen Arithmetik sich von ihnen abzweigen.

Auf eine Einleitung über den Grössenbegriff folgt zunächst die Lehre von den natürlichen, hierauf die Lehre von den rationalen Zahlen. Die letztere wird sowohl nach dem analytischen, als auch nach dem synthetischen Verfahren dargelegt. Besondere Aufmerksamkeit haben wir hier, wie auch später, der bisher etwas vernachlässigten Theorie des Rechnens mit den Decimalzahlen geschenkt.

Die Arithmetik ist erst eine selbständige Wissenschaft geworden, seitdem es gelungen ist, die Lehre von den irrationalen Zahlen ohne den Beistand der Geometrie zu entwickeln. Wir haben sie im VII. Abschnitte nach G. Cantor und Ch. Méray dargestellt, weil das von diesen Gelehrten ersonnene Verfahren die vollständige Durchführung derselben am leichtesten gestattet. Dabei wird dann auch gezeigt, dass die Verhältnisse der geraden Strecken den Cantor'schen reellen Zahlen gleichgesetzt werden dürfen.

An den Abschnitt über die irrationalen Zahlen schliesst sich einerseits die Lehre von den reellen Potenzen, Wurzeln und Loga-

rithmen als die am nächsten liegende Anwendung dieser Zahlen, andererseits die Lehre von den unendlichen Reihen mit reellen Gliedern. Pflegen wir ja eine irrationale Zahl als Summe von unendlich vielen rationalen Zahlen anzusehen.

Das System der reellen Zahlen wird durch Hinzufügung neuer Zahlen zu dem der gemeinen complexen Zahlen erweitert. Damit ist die gewöhnliche Arithmetik abgeschlossen; denn unter den Systemen von complexen Zahlen aus mehr als zwei Einheiten befindet sich kein einziges, wofür die nämlichen Rechnungsregeln wie für die gemeinen complexen Zahlen ohne Ausnahme gelten. Beim Beweise dieser Behauptung gelangen wir zum Satze, dass selbst wenn wir von diesen Regeln die Commutativität des Products aufgeben, doch nur ein Zahlensystem möglich ist: die Quaternionen.

Die gemeinen complexen Zahlen lassen sich geometrisch durch die Vectoren in der Ebene darstellen und es entsprechen den vier Rechnungsarten mit denselben gewisse planimetrische Constructionen. Die trigonometrische Form ihrer Ergebnisse ist wiederum für die Arithmetik von Wichtigkeit, indem man mit Hilfe derselben leicht die m^{ten} Wurzeln aus einer gemeinen complexen Zahl ermitteln kann.

Nunmehr erhebt sich von selbst die Frage nach der Erklärung der Potenz für complexe Werthe der Basis und des Exponenten. Wir knüpfen sie nach einem von Cauchy angedeuteten und von Schlömilch wirklich durchgeführten Verfahren unmittelbar an die Lehre von der absoluten Potenz an. — Den Schluss des Werkes bilden die grundlegenden Sätze über die unendlichen Reihen mit complexen Gliedern.

Das von den soeben erwähnten Gegenständen gebildete Gebiet lässt sich dadurch kennzeichnen, dass zur Behandlung derselben der Begriff der stetigen Function nicht erforderlich ist. Freilich muss dann auf eine nach allen Seiten erschöpfende Entwickelung des Begriffs der complexen Potenz verzichtet werden.

Der Inhalt des Werkes deckt sich zum grössten Theile mit dem der Abschnitte I—VIII, X Nr. 1—12, XI Nr. 2—6 des ersten und der Abschnitte I, II, V Nr. 1—5 des zweiten Theiles der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“ von O. Stolz. Diese Abschnitte erscheinen hier in einer neuen Bearbeitung. Insbesondere sind am II.—V. des ersten und am I. des zweiten Theiles bedeutende Aenderungen vorgenommen worden. Im letztgenannten Abschnitte, welchem der X. des vorliegenden Werkes entspricht, wurden die Untersuchungen von Weierstrass und Dedekind über die complexen Zahlen mit n Einheiten durch den oben angezogenen Satz von Frobenius über die Quaternionen ersetzt. Neu hinzugekommen ist der XII. Abschnitt nebst dem darauf sich beziehenden Theile des VIII. Nr. 12—19 des X. und der XII. Abschnitt sind von Gmeiner ausgearbeitet. Sämmt-

liche Abschnitte mit Ausnahme des I. und V. sind mit einschlägigen Uebungen versehen, welche manchmal zur Fortführung der vorhergehenden Lehren dienen können.

Wir beabsichtigen auch die in diesem Buche nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" in neuer Auflage als ein eigenes Werk unter dem Titel: „Einleitung in die Functionentheorie nach Weierstrass" herauszugeben.

Will der Leser bloss einen systematischen Aufbau der Arithmetik kennen lernen, so kann er den 5. und 6. und, falls er der ebenen Trigonometrie mächtig ist, auch den 11. Abschnitt übergehen. Der 5. Abschnitt erörtert nämlich im Rahmen einer allgemeineren Untersuchung die Eigenschaften des Systemes der geraden Strecken und der 11. beschäftigt sich mit dem Rechnen mit den Vectoren in der Ebene, wobei die Grundformeln der Trigonometrie sich ergeben. Während diese beiden Abschnitte eigentlich in die moderne Geometrie einschlagen, behandelt der 6. einen Gegenstand der alten Geometrie, die Euclid'sche Verhältnisslehre. Diese Lehre, obwohl an sich heutzutage entbehrlich, verdient als das klassische Muster der Grössenbildung, von deren Grundsätzen auch wir uns leiten lassen, einen Platz in unserm Werke.

Innsbruck und Prag, im Juni 1902.

Stolz. Gmeiner.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Einleitung. Begriff der Grösse und Zahl.

II. Abschnitt.

Die natürlichen Zahlen.

III. Abschnitt.

Analytische Theorie der rationalen Zahlen.

Analytische Schöpfung des Systems der rationalen Zahlen.

IV. Abschnitt.

Synthetische Theorie der rationalen Zahlen.
Die systematischen Brüche.

V. Abschnitt.

Stetige Systeme einer Dimension von absoluten und von relativen Grössen.

VI. Abschnitt.

Theorie der Verhältnisse nach Euclid. Ableitung der reellen Zahlen aus denselben.

VII. Abschnitt.

Arithmetische Theorie der irrationalen Zahlen nach G. Cantor und Ch. Méray. Die reellen Zahlen.

VIII. Abschnitt.

Reelle Potenzen, Wurzeln, Logarithmen.

IX. Abschnitt.

Die unendlichen Reihen mit reellen Gliedern.

Reihen mit positiven Gliedern.

Reihen, welche sowohl positive als auch negative Glieder in unbegrenzter Anzahl enthalten.

X. Abschnitt.

Analytische Theorie der complexen Zahlen.

XI. Abschnitt.

Geometrische Theorie der gemeinen complexen Zahlen.

XII. Abschnitt.

Complexe Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.

XIII. Abschnitt.

Unendliche Reihen mit complexen Gliedern.



V. Abschnitt.

Stetige Systeme einer Dimension von absoluten und von relativen Grössen.

1. Absolute Grössen im engeren und weiteren Sinne. — Der Hauptzweck dieses Abschnittes ist, die Stetigkeit eines Grössensystems von einer Dimension ohne Benutzung der irrationalen Zahlen zu erklären. Dabei unterscheiden wir die absoluten und relativen Grössen.

Wir sind gewohnt, die gleichartigen unter den Grössen der alten Geometrie, die Strecken der geraden Linie, die Winkel, die Flächen, die Körper als stetige absolute Grössen zu bezeichnen. Den Grössen einer jeden von diesen Arten werden zunächst die nachstehenden Eigenschaften beigelegt.

Es mögen die grossen lateinischen Buchstaben $A, B, C \cdots$ irgendwie erklärte gleichartige Grössen bedeuten. Dieselben sollen den folgenden Forderungen und zwar nach einander in der angegebenen Ordnung unterworfen werden.

I.) Je zwei derselben können entweder als gleich oder ungleich und im letzteren Falle kann die eine als die grössere, die andere als die kleinere bezeichnet werden. Eine kleinste Grösse giebt es nicht.

II.) Die Grössen lassen sich genau so addiren (und vervielfachen) wie die natürlichen Zahlen, insbesondere ist die Summe je zweier eine Grösse des Systemes.

III.) Falls $A > B$, so existirt im Systeme eine Grösse X, so dass $B + X = A$ ist.

IV.) Jede Grösse A ist unbeschränkt in gleiche und mit ihr gleichartige Theile zerlegbar d. h. es giebt im Systeme eine Grösse X, so dass $nX = A$, worin n jede natürliche Zahl grösser als 1 bedeuten kann.

V.) Ist $A > B$, so giebt es ein Vielfaches von B, das grösser ist als A d. i. eine solche natürliche Zahl p, dass $pB > A$ ist.

Hierbei ist zunächst zu bemerken, dass die fünfte Eigenschaft nicht aus den übrigen hervorgeht, denn es giebt Grössen z. B. die positiven complexen Zahlen (vgl. X. 4) oder die von P. du Bois-Reymond eingeführten „Unendlich der Functionen", welche die Forderungen I.)—IV.) erfüllen, V.) aber nicht. Die Postulate I.)—IV.) sind ebenfalls formal von einander unabhängig.

Grössen, welche den Eigenschaften I.)—IV.) genügen, sollen absolute heissen und zwar, wenn hierzu noch die fünfte tritt, eigentliche oder a. Gr. im engeren Sinne; sonst uneigentliche oder solche im weiteren Sinne.[1])

Gestützt auf die Untersuchungen des 1. und 3. Abschnittes können wir die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen angeben, welchen die Grössen eines Systemes A, B, $C \cdots$ zu entsprechen haben, um als absolute Grössen im engeren Sinne zu gelten. Nach Aufstellung der in I.) geforderten Definitionen ist nachzuweisen, dass

1) aus $A = B$ $B = A$;

2) aus $A > B$ $B < A$ folgt und umgekehrt;

3) die aufgestellte Disjunction „gleich, grösser, kleiner" vollständig ist;

4) aus $A = B$, $B = C$ sich ergiebt $A = C$ [Euclid's 1. allgemeiner Grundsatz (κοινὴ ἔννοια)];

5) aus $A = B$, $B > C$ folgt $A > C$;

6) aus $A > B$, $B > C$ folgt $A > C$.

7) Es giebt neben jeder Grösse eine kleinere; also giebt es keine kleinste Grösse. — Die Anzahl der Grössen unseres Systems ist mithin unendlich. Ungleiche Grössen desselben in endlicher Anzahl heissen discrete Grössen.[2])

Nunmehr ist je zweien Grössen A, B eine dritte Grösse des Systemes als ihre Summe zuzuordnen. Dabei müssen erfüllt sein die Sätze:

8) Wenn $A = A'$, $B = B'$, so ist $A + B = A' + B'$ (Euclid's 2. Grundsatz);

9) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

10) $A + B = B + A$;

11) $A + B > A$ (Euclid's 8. Grundsatz);

12) Wenn $A > A'$ $B = B'$ ist, so ist $A + B > A' + B'$ (Euclid's 4. Grundsatz);

13)—15) Die obigen Forderungen III.)—V.), deren letzte von Archimedes als Annahme (λῆμμα λαμβανόμενον) angeführt[3]) und welche daher im Folgenden als „Axiom des A." bezeichnet wird.

---

1) Im Folgenden sind unter „absoluten Grössen" schlechtweg stets die ersteren zu verstehen.

2) Manchmal heisst auch ein System von unbegrenzt vielen Grössen, welches den Inhalt Null hat, discret. Vgl. O. Stolz, Grundzüge der Diff.- u. Integr.-Rechnung. III. S. 264.

3) Vgl. Archimedes de sphaera et cylindro I. postul. 5 und die Vorrede zur Schrift de quadratura parabolae. Am letzteren Orte sagt A., dass bereits frühere Geometer ein ähnliches Axiom angenommen hätten. Euclid gebraucht den Satz V.) beim Beweise des 8. Satzes des V. und des 1. Satzes

Die vorstehenden Forderungen 1)—15) erscheinen in der durch die Logik verlangten Anordnung, d. h. will man zeigen, dass irgend wie erklärte Dinge zu den eigentlichen absoluten Grössen gehören, so hat man zuerst die Vergleichung unter ihnen durchzuführen, hierauf für sie eine den Forderungen 8)—12) genügende Addition aufzustellen, worauf man erst zur Subtraction und Theilung dieser Grössen übergeht.

Bei dieser Anordnung der Postulate 1)—15) ist jedes von den vorausgehenden unabhängig.

Schon der Satz 4) ist von 1)—3) unabhängig, vgl. Nachtrag am Schlusse des Werkes zu S. 95.

Dass 10) von 9) nicht abhängt, zeigen G. Cantor's transfinite Zahlen, deren Addition wohl associativ, aber nicht commutativ ist. Dass der Satz 11) nicht aus den vorhergehenden folgt, ist bekannt, indem ja die allgemeinen rationalen Zahlen die Forderungen 1)—10) befriedigen, ihm aber nicht genügen. Wir werden ferner sofort an zwei von Gmeiner gegebenen Beispielen sehen, dass die Forderungen 1)—11) erfüllt sein können, ohne dass es die 12. ist. Aber auch der Satz 13) $\equiv$ III.) auf S. 99 ergiebt sich nicht aus den in I.) und II.) zusammengefassten Sätzen. Er gilt nämlich nicht allgemein für das von den absoluten rationalen Zahlen, welche grösser als 1 sind, gebildete System. Dass der Satz 14) $\equiv$ IV.) auf S. 99 nicht eine Folgerung aus seinen Vorgängern sein kann, lässt sich mittelst des Systems der absoluten endlichen Dezimalzahlen, welches aus den ganzen Zahlen und den endlichen echten und unechten Dezimalbrüchen besteht, klar machen. In demselben giebt es nämlich keine Zahl, deren dreifaches gleich 1 wäre u. s. f.

Eine andere Frage ist, ob nicht durch das Hinzutreten einer der vorstehenden Forderungen zu den vorhergehenden einige von diesen entbehrlich werden. In der That werden durch Hinzufügung der 13. Forderung zur 1.—12. die 5., 6. und 12. überflüssig, weil sie von selbst erfüllt sind (vgl. u. A. Schröder, Lehrbuch u. s. w. S. 61). Ist z. B. $A > B$ $B > C$, so giebt es im Systeme Grössen X, Y, wofür $A = B + X$, $B = C + Y$ ist. Somit ist nach dem 9. Satze

$$A = (C + Y) + X = C + (Y + X),$$

also nach dem 11. $A > C$. — Auf ähnliche Weise lassen sich auch die Sätze 5) und 12) erweisen.

Auf diese allgemeine Uebersicht mögen die oben erwähnten Gmeiner-schen Grössensysteme folgen. Das erste entsteht durch Paarung der absoluten rationalen[1]) Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \cdots$. Jedes Paar von ihnen bestimmt ein Ding A, was durch die Identitäten $A \equiv (\alpha, \beta)$ $B \equiv (\gamma, \delta) \cdots$ ausgedrückt werden möge. Behufs Vergleichung dieser Zahlenpaare untereinander werde Folgendes festgesetzt:

---

des X. Buches, ohne ihn als Axiom zu bezeichnen; während er doch 11, nach Andern 8 Aussagen am Anfange des 1. Buches ausdrücklich als solche aufführt.

1) Das System behält die nämlichen Eigenschaften, wenn die absoluten rationalen Zahlen durch die absoluten reellen Zahlen ersetzt werden.

I) Zwei Paare $A \equiv (\alpha, \beta)$ $B \equiv (\gamma, \delta)$ seien dann und nur dann einander gleich, wenn $\alpha = \gamma$ $\beta = \delta$ ist.

II) Von je zwei ungleichen Paaren A B sei $A > B$ und $B < A$, wenn entweder $\alpha > \gamma$ oder $\alpha = \gamma$ und $\beta > \delta$ ist.

Für diese Grössen bestehen, wie leicht zu sehen (vgl. X. 4), die obigen Sätze 1)—6). — Auch der 7. ist erfüllt. Denn ist $A \equiv (\alpha, \beta)$ und γ irgend eine absolute rationale Zahl kleiner als α, so ist $(\gamma, \delta) < (\alpha, \beta)$, welche Zahl δ auch sein mag.

III) Als Summe der Grössen $A \equiv (\alpha, \beta)$ $B \equiv (\gamma, \delta)$ erklären wir im Falle dass $\beta = \delta$ ist, die Grösse $(\alpha + \gamma, \beta)$, im Falle dass β und δ ungleich sind, die Grösse $(\alpha + \gamma, \varkappa)$, wo $\varkappa$ die kleinere von den beiden Zahlen β, δ bedeutet.

Dadurch sind die Forderungen 8)—11) sämmtlich befriedigt, was auch ebenfalls unmittelbar zu erkennen ist. Lassen wir $C \equiv (\varepsilon, \zeta)$ sein, so ist

$$(A + B) + C = (\alpha + \gamma + \varepsilon, \lambda),$$

wo λ die kleinste der Zahlen $\beta\ \delta\ \zeta$ bedeutet oder, falls diese einander gleich sind, ihnen gleich ist. Den nämlichen Werth hat $A + (B + C)$, sodass der Satz 9) besteht. Es ist ferner

$$B + A = (\gamma + \alpha, \varkappa) = (\alpha + \gamma, \varkappa) = A + B.$$

Der Satz 12) gilt jedoch nicht mehr allgemein. Es ist $(\alpha, \beta) > (\alpha, \beta')$ wenn $\beta > \beta'$ ist. Ist dann $\delta < \beta'$, so haben wir nach III)

$$(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \delta) \qquad (\alpha, \beta') + (\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \delta);$$

folglich ist nunmehr

$$(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\alpha, \beta') + (\gamma, \delta).$$

Betrachten wir noch die Gleichung $B + X = A$ d. i.

$$(\gamma, \delta) + (\xi, \eta) = (\alpha, \beta). \tag{a}$$

Soll sie bestehen, so muss nach III) β entweder gleich oder kleiner als δ und $\gamma + \xi = \alpha$, also $\gamma < \alpha$ sein. Ist $\beta < \delta$ und $\alpha > \gamma$, so hat die Gleichung (a) die einzige Lösung $X = (\alpha - \gamma, \beta)$; ist $\beta = \delta$ und $\alpha > \gamma$, so hat sie die unendlich vielen Lösungen $X = (\alpha - \gamma, \eta)$ $(\eta \geqq \beta)$. In allen andern Fällen, namentlich wenn $\alpha \geqq \gamma$ und $\beta > \delta$, somit $(\alpha, \beta) > (\gamma, \delta)$ ist, hat sie keine Lösung.[1]) Dies steht im Einklang mit dem, was vorhin über den Zusammenhang der 12. und 13. Forderung bemerkt wurde.

In dem soeben besprochenen Systeme giebt es Grössen A, A', B derart, dass neben $A > A'$ $A + B = A' + B$ ist. Es lässt sich aber auch ein solches System aufstellen, in welchem neben $A > A'$ $A + B < A' + B$ sein kann, während dasselbe noch immer die Eigenschaften 1)—11) besitzt. — Wir betrachten die Paare $A \equiv (\alpha, m)$, worin α jede positive rationale (oder auch jede positive reelle) Zahl sein

---

1) O. Hölder (Leipziger Ber. 1901 S. 4 u. 5) weist die Unabhängigkeit der 12. Forderung von der 1.—10. durch ein Beispiel nach, welches dieselben Eigenschaften besitzt, wie das erste, ihm nachgebildete Beispiel i. T. Bei H. ist die 2. Coordinate des Zahlenpaares beschränkt auf das Intervall von a bis b mit Einschluss der Zahlen a, b selbst, welche positiv sein sollen.

kann, während m eine beliebige der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bedeuten soll. Nun setzen wir wieder die Erklärungen I) und II) fest, sodass auch die Forderungen 1)—7) wieder erfüllt sind.

III′) Als Summe von $A \equiv (\alpha, m)$ und $B \equiv (\beta, n)$ erklären wir die Grösse

$$(\alpha + \beta, p),$$

worin p jene Ziffer bedeutet, welche die Congruenz

$$m + n \equiv p \pmod{10}$$

erfüllt.

Dadurch werden, wie man leicht erkennen kann, die Forderungen 8)—11) erfüllt. Statt 12) heisst es jetzt aber: „Neben $A > A'$ ist nicht immer $A + B > A' + B$, sondern es giebt auch Grössen A, A', B des Systems der Art, dass neben $A > A'$ $A + B < A' + B$ ist.“ — Es ist nämlich z. B. $(5, 8) > (5, 2)$. Daneben hat man

$$(5, 8) + (1, 7) = (6, 5) \qquad (5, 2) + (1, 7) = (6, 9),$$

also, da $(6, 5) < (6, 9)$ ist,

$$(5, 8) + (1, 7) < (5, 2) + (1, 7).$$

2. Folgerungen aus den Forderungen 1)—15). — Aus den Sätzen 1)—13) folgen alle im 2. Abschnitte angeführten Regeln der Addition und Subtraction, insbesondere der Satz, dass die Gleichung $B + X = A$ im Falle dass $A > B$ ist, nur eine Lösung nach X hat. Ferner die Sätze:

1) Zu jeder Grösse B giebt es eine grössere. — Eine solche ist nach 11) $B + X$, wobei X jede Grösse des Systems sein kann.

2) Zwischen je zwei ungleichen Grössen liegen Grössen des Systemes. — Ist $A > B$ und $A = B + X$, so ist, wenn X' irgend eine Grösse kleiner als X bedeutet, nach dem 11. und 12. Satze $B < B + X' < A$.

In den weiteren Sätzen sollen die kleinen lateinischen Buchstaben natürliche, die kleinen griechischen absolute rationale Zahlen bedeuten.

3) Ist $A = A'$, so sind auch die Gleichvielfachen beider Grössen einander gleich: $aA = aA'$; dagegen ist $aA > a'A'$, falls $a > a'$ ist. Diese Sätze lassen sich nach I. 10 umkehren.

4) Ist $A > A'$, so ist $aA > aA'$.

5) $aA \pm aB = a(A \pm B)$ (Eucl. V. prop. 1), wobei im Falle des unteren Zeichens $A > B$ sein soll.

6) Es ist $a(bA) = b(aA) \equiv (ab)A$.

7) Die Gleichung $nX = A$ hat nur eine Lösung nach X, welche mit $\frac{1}{n}A$ oder $\frac{A}{n}$ bezeichnet wird. Ist $A = A'$ so ist $\frac{1}{n}A = \frac{1}{n}A'$. Ist aber $A > A'$, so ist $\frac{1}{n}A > \frac{1}{n}A'$. Diese beiden Sätze lassen sich nach I. 10 umkehren.

8) $\frac{b}{n}A$ bedeute das $b$fache von $\frac{1}{n}A$ und ist „$b$ntel von A“ zu lesen. Man darf nunmehr in den Formeln von IV. 1. 2 die Einheit 1 durch jede Grösse A ersetzen. Man hat in der That, wenn man in 6) statt A A/n und statt a n schreibt,

$$\alpha) \qquad n\left(b\frac{A}{n}\right) = b\left(n\frac{A}{n}\right) = bA \quad \text{d. i.} \quad \frac{b}{n}A = \frac{bA}{n}.$$

Ersetzt man darin bloss A durch A/n, so erhält man die Formel

$$\beta) \qquad a\left(\frac{b}{n}A\right) = \frac{ab}{n}A.$$

Ist $B = A/an$, so ist nach 6) $A = (an)B = n(aB)$; also hat man $aB = A/n$ d. i.

$$\gamma) \qquad \frac{A}{n} = \frac{a}{an}A.$$

Hieraus ergiebt sich mit Hilfe von β)

$$\delta) \qquad \frac{b}{n}A = \frac{ab}{an}A.$$

Mithin ist, wenn die Brüche a/m, b/n einander gleich sind, auch

$$\varepsilon) \qquad \frac{a}{m}A = \frac{b}{n}A.$$

Denn da $an = bm$ sein soll und nach δ)

$$\frac{a}{m}A = \frac{an}{mn}A = \frac{(an)A}{mn} \qquad \frac{b}{n}A = \frac{bm}{nm}A = \frac{(bm)A}{mn} \tag{b}$$

ist, so besteht die Gleichung ε). — Auf ähnliche Art zeigt man, dass neben

$$\zeta) \qquad \frac{a}{m} > \frac{b}{n} \qquad \frac{a}{m}A > \frac{b}{n}A$$

ist. Die beiden Sätze lassen sich wieder umkehren.

Aus der zweiten der Formeln (b) ist ersichtlich, dass

$$\eta) \qquad \frac{1}{m}\left(\frac{b}{n}A\right) = \frac{b}{mn}A$$

ist. Somit hat man nach β)

$$\vartheta) \qquad \frac{a}{m}\left(\frac{b}{n}A\right) = \frac{ab}{mn}A.$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch die weiteren Sätze a. a. O. hierher übertragen.

9) „Ist μ eine absolute rationale Zahl, so ist

$$\mu A \pm \mu B = \mu(A \pm B),$$

im Falle des unteren Zeichens $A > B$ vorausgesetzt.“

Aus der Forderung 15) in Nr. 1 ergiebt sich: 10) „Ist $A > B$, so ist A entweder ein Vielfaches von B oder A liegt zwischen zwei

aufeinander folgenden Vielfachen von B: $qB < A < (q+1)B$.“ Beweis wie beim ähnlichen Satze über zwei natürliche Zahlen in II. 8.

11) „Ist $A > B$ und C beliebig, so giebt es absolute rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ derart, dass $A > \frac{p}{q} C > B$ — und zwar unzählig viele.“ Denn es giebt ganze Zahlen q, wofür $q(A-B) > C$ ist und nach Satz 10) eine ganze Zahl p, so dass

$$pC > qB \geqq (p-1)C;$$

demnach ist

$$A > B + \frac{1}{q} C \geqq \frac{p}{q} C > B.$$

Zwischen A und $\frac{p}{q} C$, sowie zwischen $\frac{pC}{q}$ und B liegt wieder je eine Grösse von der verlangten Form u. s. f.

3. **Commensurabele und incommensurabele absolute Grössen im engeren Sinne.** — Ist eine Grösse A ein Vielfaches einer anderen M, so heisst die letztere ein Maass der ersteren. Besitzen zwei gleichartige Grössen A, B ein gemeinschaftliches Maass M, so nennt man sie commensurabel. Wenn

$$A = aM, \qquad B = bM,$$

so ist

$$A = \frac{a}{b} B.$$

Ist M' ein anderes gemeinschaftliches Maass von A, B, so dass $A = a'M'$, $B = b'M'$, so ist $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$. Denn man hat $bA = aB$ $b'A = a'B$, also $a'bA = a'aB = a(a'B) = ab'A$ und $a'b = ab'$. Der gemeinsame Werth der Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ heisst die Maasszahl von A in Bezug auf B oder das Verhältniss von A zu B und wird als solches mit $A : B$ bezeichnet.

Das grösste gemeinschaftliche Maass zweier Grössen A, B wird auf ähnliche Weise ermittelt, wie der grösste gemeinsame Theiler zweier natürlichen Zahlen (vgl. II. 12).[1] Wenn $A > B$, so ist entweder $A = qB$ oder $A = qB + B'$, wo $B' < B$. Im zweiten Falle hat man entweder $B = q'B'$ oder $q'B' + B''$, wo $B'' < B'$ und im letzteren wieder entweder $B' = q''B''$ oder $q''B'' + B'''$, wo $B''' < B''$ u. s. f. Auf diese Art gelangt man entweder zu einem Reste $B^{(n)}$, der seinen Vorgänger misst: $B^{(n-1)} = q^{(n)}B^{(n)}$ oder es zeigt sich, dass wie gross auch n sein mag, $B^{(n)}$ niemals ein Maass von $B^{(n-1)}$ ist:

1) Euclid Elem. X, prop. 1—3.

$$A = qB + B',$$
$$B^{(n-1)} = q^{(n)} B^{(n)} + B^{(n+1)} \quad (B^{(n+1)} < B^{(n)}) \quad (n = 1, 2 \cdots).$$

Im ersten Falle ist $B^{(n)}$ ein gemeinschaftliches Maass von A, B und zwar das grösste, da jedes Maass von A, B auch die Grössen B', $B'' \cdots B^{(n)}$ misst. Im zweiten Falle giebt es kein gemeinschaftliches Maass der Grössen A, B; sie sind incommensurabel. Denn wäre eines (M) vorhanden, so müsste es B', $B'' \cdots B^{(n)}$ messen; es kann aber n so gross angenommen werden, dass $B^{(n)} < M$. Folglich giebt es keines.

Der soeben benutzte Hilfssatz ergiebt sich in folgender Weise. Zunächst bemerke man, dass

$$B^{(n+2)} < \tfrac{1}{2} B^{(n)}.$$

Man schliesst nämlich aus der Gleichung

$$B^{(n)} = q^{(n+1)} B^{(n+1)} + B^{(n+2)},$$

da

$$q^{(n+1)} \geqq 1 \qquad B^{(n+1)} > B^{(n+2)}$$

ist, unmittelbar, dass

$$B^{(n)} \geqq B^{(n+1)} + B^{(n+2)} > 2 B^{(n+2)}.$$

Demnach folgt nacheinander

$$B'' < \tfrac{1}{2} B, \qquad B^{\mathrm{IV}} < \tfrac{1}{2} B'' \cdots B^{(2n)} < \tfrac{1}{2} B^{(2n-2)},$$

somit

$$B^{(2n)} < \frac{1}{2^n} B.$$

Nach 15) in Nr. 1 giebt es Zahlen p, so dass $M > \frac{1}{p} B$ und nach II. 9 Exponenten m, so dass $2^m > p$. Mithin ist $M > B^{(2m)}$.

Ein System von absoluten Grössen im engeren Sinne, wovon je zwei commensurabel sind, heisse commensurabel, ein solches, worin mindestens zwei incommensurabel sind, incommensurabel.

Commensurabel ist sohin z. B. das System der absoluten rationalen Zahlen. Um ein incommensurables Grössensystem zu bilden, wähle man eine absolute rationale Zahl β aus, die nicht das Quadrat einer solchen Zahl ist und bezeichne mit ξ, η irgend welche absolute rationale Zahlen. Alsdann fasse man zusammen 1) die Zahlen ξ, 2) die Zahlen $\eta\sqrt{\beta}$, 3) die Zahlen $\xi + \eta\sqrt{\beta}$, 4) die Zahlen $\xi - \eta\sqrt{\beta}$, wobei jedoch $\xi^2 > \eta^2\beta$, und endlich 5) die Zahlen $\eta\sqrt{\beta} - \xi$, wobei $\xi^2 < \eta^2\beta$ sein soll. — Wenn man sich hinsichtlich der Quadratwurzeln lediglich auf die Festsetzungen in III. 17 stützen will, so gestaltet sich der Nachweis des Satzes, dass das soeben erklärte Zahlensystem die Forderungen 1)—15) in Nr. 1 befriedigt, umständlich. Zunächst hätte man die Vergleichung von je zwei

der genannten Zahlen durchzuführen, wozu die Erklärungen 1) 2) 4) auf S. 71 gehören. Zum Beweise des Satzes 7) würde man auch des Satzes 11) auf S. 95 bedürfen. Der Satz 15) endlich wäre wie in VII. 10 zu zeigen.

Darf man jedoch die obigen fünferlei Zahlen als reelle Zahlen im Sinne des VII. Abschnittes betrachten, so ergeben sich die in Rede stehenden Sätze unmittelbar aus den entsprechenden über die reellen Zahlen.

4. Das System der absoluten Strecken und seine Stetigkeit. — Um zwei geradlinige Strecken im Raume mit einander zu vergleichen, lege man sie in eine Gerade und verschiebe sie darin soweit, dass ein Endpunkt der einen mit einem der andern zusammenfällt und die beiden andern Endpunkte derselben sich auf der nämlichen Seite des nunmehr gemeinsamen Endpunktes befinden. Fallen diese Punkte zusammen, können also die beiden Strecken zur Deckung gebracht werden, so heissen sie einander gleich. Findet das nicht statt, so sind die Strecken ungleich und zwar heisst diejenige von beiden die grössere, welche über die andere hinausragt. Unter der Summe von zwei Strecken A B versteht man die dadurch entstehende Strecke, dass man sie nacheinander in eine Gerade legt und soweit verschiebt, dass der Endpunkt von A mit dem Anfangspunkte von B zusammenfällt. Dass für drei Strecken A B C einer Geraden

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

ist, erkennt man unmittelbar, indem die durch Nebeneinanderlegen derselben gebildete Strecke sowohl als die linke, als auch als die rechte Seite dieser Gleichung aufgefasst werden kann. Durch Umlegen der Strecke $A+B$ erhält man eine ihr gleiche; folglich ist $A+B=B+A$.

Dass $A+B>A$ ist, folgt aus der Erklärung der grösseren Strecke. Für die Strecken besteht, wie man aus der Figur ersieht, auch der Satz 12) auf S. 100. Ist $A>B$ und bezeichnet X das Stück, um welches A über B hinausragt, so hat man $B+X=A$; X wird mit $A-B$ bezeichnet. Dass jede Strecke A in n gleiche Theile zerlegt werden kann, lehrt die Planimetrie. Der Satz 15) $\equiv$ V) S. 99 wird für die Strecken zunächst als Axiom angesehen.

Wenn man auf einem Halbstrahl OX eine bestimmte von O ausgehende Strecke E als gegeben ansieht, so kann man, wie bereits in IV. 1 bemerkt ist, jede Strecke μE, wo μ irgend eine absolute rationale Zahl bedeutet, von O aus mit Hilfe von Lineal und Zirkel construiren. Construirt man aber die mittlere geometrische Proportionale zu den Strecken E und μE, so ist dieselbe, im Falle dass μ nicht das Quadrat einer rationalen Zahl ist, zu E in-

commensurabel.[1]) Schon die alten Geometer haben sich Aufgaben vorgelegt, welche sich mit Hilfe von Lineal und Zirkel nicht lösen lassen, so vor allem die Aufgabe, zu den Strecken E und μE zwei mittlere Proportionalen (s. VIII. Uebungen) zu construiren. Dass dieselben gleichwohl vorhanden sein müssen, schliesst man aus der Stetigkeit des Systems der Strecken OM, wo M einen willkürlichen Punkt der Geraden OX bedeutet.

Um die Stetigkeit desselben zu erklären, braucht man nur die Gesammtheit der Strecken OM zu betrachten, welche nach Weglassung einer einzigen OA (d. i. des Punktes A) aus der Geraden OX übrig bleiben. Sie erfüllt ebenfalls alle Forderungen 1)—15) in V. 1. Dabei zerfallen die ihr zugehörigen Strecken in zwei Gruppen von den folgenden Eigenschaften.

1) Jede von diesen Strecken gehört einer und nur einer Gruppe an.

2) Jede Strecke P_1 der ersten Gruppe ist kleiner als jede Strecke P_2 der zweiten Gruppe.

3) Ist P_1 eine Strecke der ersten Gruppe, so gehört zu dieser Gruppe auch eine Strecke, welche grösser als P_1 ist und ist P_2 eine Strecke der zweiten Gruppe, so befindet sich darin auch eine Strecke, welche kleiner als P_2 ist. Oder: es giebt weder in der ersten Gruppe eine grösste, noch in der zweiten eine kleinste Strecke.

Die Stetigkeit des Systems aller Strecken OM besteht eben darin, dass eine Theilung derselben in zwei Gruppen von der obigen Beschaffenheit unmöglich ist, dass also wenn wir die Gesammtheit der Strecken so in zwei Gruppen theilen, dass jede Strecke der ersten Gruppe kleiner ist als jede der zweiten, entweder in der ersten Gruppe eine grösste oder in der zweiten eine kleinste vorhanden ist, welche diese Zerschneidung der Geraden OX hervorbringt.[2])

Eine strengere Begründung des Satzes, dass die Strecken von gleicher Richtung absolute Grössen im eigentlichen Sinne sind, findet man in einer Abhandlung von O. Hölder (Leipziger Berichte 1901 S. 37f.).

---

1) Wäre nämlich das Verhältniss dieser Proportionale zu E (S. 105) eine rationale Zahl ξ, so müsste $\xi^2 = \mu$ sein. Eine solche Zahl giebt es aber nicht (III. 17). — Die mittlere geometrische Proportionale zu E und $2E$ ist auch die Hypotenuse im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke mit der Kathete E. Die Incommensurabilität dieser beiden Strecken lässt sich nach Legendre (Elem. de Géométrie III. probl. 19) auch nach dem Verfahren von Nr. 3 darthun. Bezeichnet man nämlich jetzt die Hypotenuse mit A, die Kathete mit B, so hat man $A = B + B'$ $B^{(n-1)} = 2B^{(n)} + B^{(n+1)}$ $(n = 1, 2 \cdots)$.

2) R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen 1872, S. 18. Der Gedanke, je zweien i. T. beschriebenen Gruppen von Strecken einen Punkt der Geraden (point de demarcation) zuzuordnen, hat schon früher J. Bertrand (vgl. Traité d'Arithmétique Nr. 313) ausgesprochen und zum Beweise der Existenz gewisser Strecken verwerthet.

5. Andere Beispiele von eigentlichen absoluten Grössen aus der Geometrie. — a) Die Winkel. Liegen drei Punkte $A\,C\,B$ nicht in gerader Linie, so sagt man, die beiden Schenkel CA und CB bilden einen hohlen und einen erhabenen Winkel ACB. Um diese Winkel von einander zu unterscheiden, schlägt man vom Scheitel C aus einen Kreis mit dem Radius 1, welcher jene Schenkel bezw. in den Punkten $A_1 B_1$ und die Verlängerung von AC in A_1' schneiden möge. Alsdann giebt der Bogen $A_1 B_1$ den hohlen, der Bogen $A_1 A_1' B_1$ den erhabenen Winkel ACB an. Diesen eigentlichen Winkeln gesellt man noch den geraden Winkel ACB, falls C innerhalb der Strecke AB liegt, und den vollen Winkel, welcher dem ganzen von C aus beschriebenen Einheitskreise entspricht, bei. Die soeben erklärten Winkel bilden indess kein System von absoluten Grössen in vollem Sinne des Wortes. Um ein solches zu erhalten, denke man sich die Winkel mit einem und demselben Scheitel C durch beständig in einem Sinne fortgeführte Drehung eines Halbstrahles CB von einer Anfangslage CA aus entstanden und dabei der Drehung keine Schranken gesetzt, so dass der Punkt B_1 auf dem beweglichen Schenkel CB den Umfang des Einheitskreises beliebig oft durchlaufen darf.

Die Vergleichung je zweier solcher Winkel wird in folgender Weise bewerkstelligt. Gehören zu ihnen verschiedene Anzahlen von vollen Umdrehungen, so heisst derjenige, zu welchem die grössere Zahl von solchen Umdrehungen gehört, der grössere Winkel. Gehört zu beiden Winkeln die nämliche Anzahl von vollen Umdrehungen, so lasse man sie bei beiden weg und lege die Scheitel und jene Schenkel aufeinander, von denen bei einem jeden von beiden die Drehung ausgeht. Fallen alsdann auch die zwei andern Schenkel der beiden Winkel zusammen, so sind die Winkel einander gleich. Findet dies nicht statt, so heisst derjenige Winkel grösser, dessen Bogen vom zweiten Schenkel des andern geschnitten wird. Unter der Summe zweier Winkel, welche den nämlichen Scheitel C besitzen und, wie hier stets angenommen ist, in demselben Sinne beschrieben sind, versteht man den Winkel, welcher entsteht, indem man den einen der beiden Winkel so lange um C dreht, bis sein erster Schenkel mit dem zweiten des andern zusammenfällt, und hierauf vom ersten Schenkel des letzteren im vorgeschriebenen Sinne und unter Ausführung so vieler voller Umdrehungen, als bei beiden Winkeln zusammen vorkommen, zum zweiten Schenkel des ersten übergeht. Zufolge dieser Festsetzungen sind die Forderungen 1)—13) in Nr. 2 sämmtlich erfüllt. Lässt man jedoch, wie es in der Geometrie gewöhnlich geschieht, die vollen Umdrehungen weg, so würde das System der Winkel der 11. und 12. Forderung nicht allgemein entsprechen.

Jeder Winkel lässt sich mit Hilfe von Zirkel und Lineal halbiren, dagegen kann man nur den rechten und gewisse andere Winkel in

drei gleiche Theile theilen, im Allgemeinen ist die Dreitheilung des Winkels mit Zirkel und Lineal nicht ausführbar. Die Theilbarkeit eines jeden Winkels in beliebig viele gleiche Theile wird aus der Stetigkeit des Systems der Winkel hergeleitet, was, wie wir in Nr. 8 sehen werden, in der That angeht. Der Nachweis des Archimedischen Axioms lässt sich für die Winkel mittelst des nämlichen Axioms für die Strecken erbringen.[1])

Es genügt denselben für den rechten Winkel R zu führen. Giebt es nämlich zu einem gegebenen spitzen Winkel α eine natürliche Zahl n derart, dass $n\alpha > R$ ist, so ist $pn\alpha > pR$. Es sei also (Fig. VII) ACB ein rechter Winkel und $CD \perp AB$. $\sphericalangle \widehat{PCP'}$ sei gleich dem Winkel α. Ist dann $\sphericalangle P'CP''$ ebenfalls gleich α, so ist, wie unschwer zu zeigen, PP' kleiner als $P'P''$. Legt man nun an CD den α gleichen Winkel DCE an und bemerkt, dass es nach Nr. 4 eine solche ganze Zahl p giebt, dass $pDE > DA$ ist, so ist zufolge des soeben Bemerkten klar, dass $p\alpha > DCA$ sein muss. Auf ähnliche Weise lässt sich eine ganze Zahl q so bestimmen, dass $q\alpha > BCD$ ist. Mithin haben wir $(p + q)\alpha > R$, w. z. b. w.

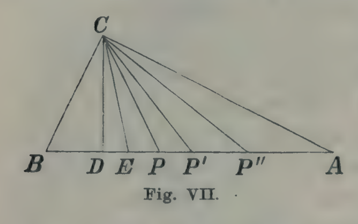


Fig. VII.

b) Die geometrischen Verhältnisse der Strecken (vgl. VI. 2—4 und 9).

c) Die Rechtecke von der nämlichen Höhe h. Dass dieselben als eigentliche absolute Grössen anzusehen sind, ergiebt sich unmittelbar aus den in Nr. 4 angeführten Eigenschaften der geradlinigen Strecken. Gleich heissen je zwei Rechtecke von der Höhe h, wenn sie gleiche Grundlinien haben, grösser unter zwei ungleichen Rechtecken von der Höhe h heisst jenes, welches die grössere Grundlinie hat u. s. w.

Hieraus kann indess, wie schon in I. 3 bemerkt, die Vergleichung von je zwei beliebigen Rechtecken nicht abgeleitet werden.

Eine Schaar von ebenen Vielecken, von denen je zwei entweder congruent sind oder sich so legen lassen, dass das eine völlig innerhalb des andern liegt, bildet im Allgemeinen kein System von absoluten Grössen im engeren Sinne. Die Vergleichung ist zwar möglich, indem je zwei congruente unter diesen Vielecken als gleich und dasjenige von zwei nicht-congruenten, welches innerhalb des anderen liegt, als das kleinere bezeichnet werden darf.[2]) Allein es wird im Allgemeinen nicht möglich sein, je zweien Vielecken unserer Schaar ein drittes aus derselben als Summe zuzuordnen.

---

1) Zuerst geführt von L. Gérard, Géométrie Non-Euclidienne 1894 S. 7. Auch der i. T. gegebene Beweis des genannten Satzes ist, wie es sein muss, vom Parallelenaxiom unabhängig.

2) Liegt nämlich das Vieleck B innerhalb des Vielecks A und das Vieleck C innerhalb B, so liegt auch C innerhalb A.

Wenn wir aber die Gesammtheit der ebenen Vielecke ins Auge fassen, so scheint es nicht schwer, dieselben zu eigentlichen absoluten Grössen zu machen. Wir brauchen nur festzusetzen:

„Zwei ebene Vielecke sind einander gleich, wenn sie entweder congruent sind oder aus gleichvielen Stücken bestehen, die paarweise congruent sind. — Ein Vieleck ist grösser als ein zweites, wenn es neben den Stücken des letzteren noch andere enthält."

„Unter der Summe zweier Vielecke ist zu verstehen das Vieleck, welches entsteht, indem man beide Vielecke längs zweier Seiten aneinanderlegt und das nunmehr gemeinsame Stück dieser beiden Seiten weglässt."

Die Rechtfertigung dieser Erklärungen verursacht jedoch Schwierigkeiten. Namentlich gilt dies hinsichtlich des Nachweises, dass die Forderung 3) auf S. 100 erfüllt ist. Wir haben nämlich zu zeigen, dass zwei Vielecke, welche bei je einer bestimmten Theilung in gleichviele paarweise congruente Stücke zerfallen, nicht etwa auf eine andere Weise so zerlegt werden können, dass das eine neben den Stücken des andern noch weitere Stücke enthält.[1] Hier ist es jedoch nicht am Platze, auf die bezüglichen geometrischen Erörterungen einzugehen. Denn die in Rede stehende Angelegenheit lässt sich leicht erledigen, wenn wir über die Gesammtheit der reellen Zahlen, die uns der VII. Abschnitt liefern wird, verfügen. Wir können alsdann jedem Vielecke eine solche Zahl zuordnen (VII. Uebungen) und hieran die Erklärung schliessen: Gleich sind zwei Vielecke, denen die nämliche Zahl entspricht, und grösser heisst unter zwei ungleichen Vielecken dasjenige, zu dem die grössere Zahl gehört.

6. Die Grössenvergleichung bei den griechischen Geometern (die Grundlage der sogenannten Exhaustionsmethode). — Ist es schon

1) Man hat, wie de Zolt (Principii della egualianza di poligoni 1881 S. 12) bemerkt, hierbei den Satz: „Zerlegt man ein Vieleck durch Gerade in Theile und lässt einen von ihnen weg, so kann man mit den übrigen das Vieleck nicht mehr vollständig bedecken" entweder als Axiom anzunehmen oder zu beweisen. Das erstere wäre ein logischer Fehler, weil zur Rechtfertigung der Erklärung des grösseren Vielecks ein besonderer Fall derselben herangezogen wird. Ueber die Beweise des Satzes vgl. die Abhandlung von U. Amaldi: „Sulla teoria dell' equivalenza" [in der Sammlung von F. Enriques: Questioni che interessano la geometria elementare, Bologna 1900], welche die vollständige Geschichte dieses Gegenstandes enthält. Von obigem Satze unabhängige Darstellungen der Vergleichung der Vielecke haben gegeben: F. Schur (Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft 1892), O. Rausenberger (Math. Ann. 43, S. 601), W. Killing, Grundlagen der Geometrie Bd. 2 (1898) S. 23, D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie 1899, Kap. IV. Mehrere in diesen Arbeiten aufgestellte Sätze werden uns in der in den Uebungen zu A. VII angedeuteten Theorie der Vieleckszahlen begegnen.

mit Umständlichkeiten verbunden, die ebenen Vielecke zu absoluten Grössen im engeren Sinne zu stempeln, so erscheint der Versuch, die sämmtlichen gewöhnlichen[1]) ebenen Flächen, die gerad- und krummlinigbegrenzten, als ein System von solchen Grössen darzustellen, völlig aussichtslos. Denn es giebt keine geometrische Regel, welche die Vergleichung einer krummlinigbegrenzten Fläche mit einer beliebig vorgelegten geradlinigbegrenzten ermöglichen würde.

Gehen wir zu den Körpern über, so zeigt sich schon die Vergleichung von je zwei Polyedern auf geometrischem Wege in der Regel unausführbar. Nicht einmal dem regelmässigen Tetraëder lässt sich ein Prisma so zuordnen, dass beide Körper in gleichviele paarweise congruente Theile zerlegt werden könnten.[2])

Trotzdem hat man von jeher sowohl den gewöhnlichen Flächen, als auch den gewöhnlichen Körpern alle jene Eigenschaften, welche nach Nr. 1 das Wesen der absoluten Grössen im engeren Sinne ausmachen, theils ausdrücklich, nämlich in Form von Axiomen, theils stillschweigend beigelegt. Insbesondere wird die Vergleichbarkeit von je zwei gleichartigen geometrischen Grössen in jenen Fällen, welche nicht durch die Euclid'schen Grundsätze 1)—8)[3]) erledigt werden können, von vorneherein angenommen. Allein damit wäre in Wirklichkeit nichts geleistet; um die Vergleichung thatsächlich durchzuführen, muss ein neuer Gedanke herangezogen werden, welcher allerdings von den Alten nirgends allgemein ausgesprochen wurde.

Archimedes giebt zu den von ihm gefundenen Sätzen über die Quadratur krummlinig begrenzter Flächen stets indirecte Beweise, welche auf der folgenden Erwägung beruhen. Sind A B gleichartige Grössen und zwar $A > B$, so ist $A - B$ eine Grösse C des Systems, folglich $A - B$ grösser als jede Grösse D desselben, welcher kleiner als C ist. Wenn sich aber bei der Annahme $A > B$ zeigen lässt, dass der Unterschied $A - B$ kleiner sein würde als eine jede Grösse D des Systems, so erscheint mithin diese Annahme unzulässig; es muss demnach $A \leqq B$ sein.[4]) Desgleichen ist die An-

---

1) Damit sind solche Flächen gemeint, deren Begrenzung mit jeder Geraden höchstens eine bestimmte Anzahl von Punkten gemein hat.

2) Vgl. M. Dehn, Göttinger Nachrichten 1900 S. 345. Math. Ann. 55 S. 465.

3) Die Euclid'schen Grundsätze 1) 2) 4) 8) sind auf S. 160 angegeben. Der Grundsatz 3): „Wenn man von Gleichem Gleiches wegnimmt, so sind die Reste gleich" erscheint als eine unmittelbare Folgerung unserer Forderung 13) in Nr. 2; Grundsatz 5): „Gleiches verdoppelt giebt Gleiches" als eine Folgerung des Grundsatzes 2); Grundsatz 6): „Gleiches halbirt giebt Gleiches" als ein besonderer Fall unserer Forderung 14). Der 7. Grundsatz lautet: „Was einander deckt, ist einander gleich." — Nach Heiberg ist die Echtheit der Grundsätze 4)—6) zweifelhaft.

4) Will man den Unterschied $A - B$ nicht benutzen, so sagt man: Ist

nahme $A < B$ nicht gestattet, wenn es sich herausstellen sollte, dass der Unterschied $B - A$ kleiner als jede Grösse D ist; in einem solchen Falle muss also $A \geqq B$ sein. Wir haben also den Satz: „Zwei gleichartige geometrische Grössen A, B sind einander gleich, wenn sich zeigen lässt, dass bei der Annahme $A > B$ der Unterschied $A - B$ und der Annahme $A < B$ der Unterschied $B - A$ kleiner als eine jede mit A und B gleichartige Grösse D sein würde." Die Benutzung dieses Satzes wird durch das Axiom (V) des Archimedes ermöglicht.

Die heutige Geometrie verwendet den soeben erwähnten Satz nicht mehr, sondern nimmt die Arithmetik zu Hilfe, indem sie jeder gewöhnlichen Fläche (sowie jedem solchen Körper) eine reelle, rationale oder irrationale, Zahl zuordnet (vgl. VII. Uebungen). Dagegen kann die Arithmetik denselben nicht entbehren; denn um zu zeigen, dass zwei reelle Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, die sich nicht mittelst der vier Rechnungsarten in einander überführen lassen, einander gleich seien, giebt es kein anderes Mittel, als nachzuweisen, dass ihr Unterschied $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ dem Betrage nach kleiner ist als jede absolute Zahl $\mathfrak{d}$ (vgl. VII. 8).

Der obige Satz über die Gleichheit zweier Grössen A, B tritt zunächst in Wirksamkeit, wenn es gelingt, zwei Reihen von solchen mit ihnen gleichartigen Grössen $C_1\ C_2 \cdots D_1\ D_2 \cdots$ zu ermitteln, dass für jeden Werth der natürlichen Zahl n

$$C_n < A < D_n \quad \text{und} \quad C_n < B < D_n$$

ist und dabei der Unterschied $D_n - C_n$ für hinlänglich grosse Werthe von n kleiner ist als irgend eine beliebig vorgegebene, mit A und B gleichartige Grösse D. Nunmehr hat man, $A > B$ vorausgesetzt, $A - B < D_n - C_n < D$ und, $A < B$ vorausgesetzt, $B - A < D_n - C_n < D$. Somit muss $A = B$ sein. — Man versuche auf diesem Wege den Satz zu zeigen, dass zwei dreiseitige Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen einander gleich sind. Anleitung: Man theile die Höhe einer jeden Pyramide in n gleiche Theile, lege durch die Theilungspunkte zu der Grundfläche parallele Ebenen und ziehe durch die Schnittpunkte dieser Ebenen mit zwei Scheitelkanten parallele zur dritten, wodurch man eine sogenannte Stufenpyramide erhält.

7. Stetiges System einer Dimension von absoluten Grössen. — Unter Schnitt eines Systemes von absoluten Grössen im engern Sinne, welche somit die Forderungen 1)—15) in Nr. 1 sämmtlich befriedigen, versteht man eine Theilung dieser Grössen in zwei Gruppen oder Classen von der Beschaffenheit, dass erstens eine jede Grösse des Systemes einer und nur einer Gruppe zugewiesen erscheint und

---

unter der Voraussetzung, dass D jede mit A und B gleichartige Grösse sein darf, stets $A + D > B$, so kann A nicht kleiner als B sein u. s. w.

zweitens jede zur ersten Gruppe gehörige Grösse kleiner ist als jede zur zweiten gehörige.

Wir unterscheiden zwei Arten von Schnitten. Entweder giebt es zu jeder Grösse P_1 der ersten Gruppe in dieser Gruppe eine grössere und zu jeder Grösse P_2 der zweiten Gruppe in dieser eine kleinere d. h. die erste Gruppe enthält keine grösste und die zweite keine kleinste Grösse. In diesem Falle sagen wir, zeigt der Schnitt (P_1, P_2) des vorgelegten Grössensystems eine Lücke in demselben an oder das System ist unstetig.[1])

Oder es giebt entweder in der ersten Gruppe des Schnittes eine grösste oder in der zweiten eine kleinste Grösse. Beides zugleich kann nicht stattfinden. Denn angenommen, es sei G die grösste Grösse in der ersten, K die kleinste in der zweiten Gruppe, so müsste $G < K$ sein. Dann aber gäbe es zufolge der Eigenschaft 7) Grössen M derart, dass $G < M < K$ ist. Dies ist aber unmöglich, da M weder zur ersten, noch zur zweiten Gruppe gehören könnte. — In diesem zweiten Falle wird vom Schnitte (P_1, P_2) des Grössensystems keine Lücke desselben aufgezeigt.

Das Grössensystem ABC heisst stetig und zwar von einer Dimension, wenn jeder mögliche Schnitt desselben von der zweiten Art ist. Zur Stetigkeit eines absoluten Grössensystems gehört demnach ausser den Voraussetzungen 1)—15) in Nr. 1 noch die folgende:

16) ($\equiv$ VI). „Theilt man die Grössen des Systems so in zwei Gruppen, dass jede einer und nur einer Gruppe angehört und dabei jede Grösse der ersten Gruppe kleiner ist als eine der zweiten, so ist entweder in der ersten Gruppe eine grösste oder in der zweiten eine kleinste Grösse vorhanden."

Es fragt sich nun, ob neben dieser neuen Forderung nicht eine der früheren entbehrlich wird. Dies ist in der That der Fall bezüglich der 14. und 15. Es besteht nämlich der Satz: „Genügen die Grössen $A\,B\,C\cdots$ den Forderungen 1)—13) und 16), so lässt sich erstens jede Grösse A in beliebig viele (n) gleiche Theile theilen und es gilt zweitens das Axiom des Archimedes (V. in Nr. 1)."[2])

---

1) Das auf S. 106 angeführte incommensurable Grössensystem ist nach dem am Schlusse von Nr. 8 Bemerkten unstetig.

2) Dieser Satz befindet sich schon in den „Vorles. über allg. Arithmetik" I. S. 82, sein zweiter Theil wurde aber infolge der von G. Veronese gegen den Beweis desselben erhobenen Einwendungen zurückgezogen (vgl. Math. Ann. 39. Bd. S. 107). Kürzlich hat jedoch O. Hölder (Leipziger Berichte 1901 S. 10) zu diesem Theilsatze einen neuen Beweis geliefert, welcher seiner Wesenheit nach in den Text aufgenommen ist. — A. a. O. S. 13 bringt Hölder die überraschende Bemerkung, dass wenn man die Forderung 11) S. 100 so formuliert: „$A + B$ ist grösser als A und als B" und zur Forderung 13) den Zusatz: „und eine Grösse Y, so dass $Y + B = A$ ist" macht, alsdann die das commutative

Beweis. Zum 1. Theile. Man bemerke zunächst, dass zu jeder Grösse B des Systemes solche Grössen Y in demselben sich angeben lassen, dass $nY < B$ ist. Man braucht ja nur B [mit Hilfe der Sätze 7) und 13)] in n ungleiche Theile zu zerlegen und Y den kleinsten von ihnen sein zu lassen. Würde man nun annehmen, es sei keine Grösse X im Systeme vorhanden, derart dass $nX = A$ ist, so könnte man eine Lücke in demselben nachweisen, was gegen die Voraussetzung 16) wäre. In der That müsste, wenn P eine beliebige Grösse des Systemes bezeichnet, nP entweder kleiner oder grösser als A sein. Dass es Grössen von der ersteren Beschaffenheit giebt wurde soeben bemerkt. Zu denen der letzteren Art gehört jede Grösse $A' > A$. Wir bilden nun aus den Grössen P_1, deren n-faches kleiner als A ist, die erste, aus den Grössen P_2, deren n-faches grösser als A ist, die zweite Gruppe eines Schnittes unseres Systemes. Dann ist $nP_1 < nP_2$, mithin $P_1 < P_2$. Ferner befindet sich in der ersten Gruppe eine Grösse grösser als P_1 und in der zweiten eine kleiner als P_2. Bestimmen wir nämlich eine Grösse Y_1 so, dass $nY_1 < A - nP_1$ ist, so haben wir $n(P_1 + Y_1) < A$. Und nehmen wir Y_2 so an, dass $nY_2 < nP_2 - A$ ist, so haben wir $A < n(P_2 - Y_2)$. Der Schnitt (P_1, P_2) würde also eine Lücke im Systeme anzeigen.

Zum 2. Theile. Es sei $A > B$. Wir zeigen, dass wenn es keine solche natürliche Zahl p geben würde, dass $A < pB$ ist, alsdann das System eine Lücke aufweisen würde. Nehmen wir in der That an, dass für jede natürliche Zahl n $nB < A$ sei, so können wir das gegebene System in zwei Gruppen zerlegen. Die erste wird gebildet von allen Grössen P_1, welche die Eigenschaft haben, dass was auch n für eine natürliche Zahl sein mag, stets $nP_1 < A$ ist; die zweite Gruppe von den Grössen P_2, zu deren jeder eine solche natürliche Zahl m gehört, dass $mP_2 > A$ ist. Eine Grösse P_1 ist B, eine Grösse P_2 jede Grösse A' grösser als A. Alsdann ist $P_2 > P_1$; denn wir haben einerseits für ein gewisses m $mP_2 > A$, andererseits $A > mP_1$, folglich $mP_2 > mP_1$ d. i. $P_2 > P_1$. — Ist nun P_1 irgend eine Grösse der 1. Gruppe, so befindet sich darin eine Grösse, welche grösser als P_1 ist. Denn was auch n sein mag, können wir Grössen Y_1 angeben derart dass $nY_1 < A - nP_1$, also $n(P_1 + Y_1) < A$ ist. Somit giebt es in der 1. Gruppe keine grösste Grösse. Ebensowenig befindet sich in der 2. eine kleinste Grösse. Denn da zu jeder Grösse P_2 der 2. Gruppe eine solche ganze Zahl m gehört, dass $mP_2 > A$ ist, so giebt es auch Grössen Y_2 derart dass $mP_2 - A > mY_2$, folglich, wenn $Y_2 < P_2$ gewählt wird, $m(P_2 - Y_2) > A$ ist. Also haben wir in der 2. Gruppe neben jeder Grösse P_2 eine kleinere. — Aus dem Vorstehenden ergiebt sich das Vorhandensein einer natürlichen Zahl p derart dass $pB \geqq A$ ist. Also ist entweder $pB > A$ oder wenn $pB = A$ sein sollte, $(p + 1)B > A$.

Eine vollständige Darstellung der vier Grundoperationen an den absoluten Strecken giebt E. V. Huntington („Ueber die Grundoperationen an den absoluten und complexen Grössen in geometrischer Behandlung" 1901).

Gesetz der Addition enthaltende Forderung 10) als eine Folgerung der Forderungen 1)—4), 7)—9), 11), 13) und 16) erscheint.

8. Ergänzung eines unstetigen Systems von absoluten Grössen zu einem stetigen System, insbesondere des Systems der absoluten rationalen Zahlen zu dem der absoluten reellen Zahlen.

Wir denken uns ein unstetiges System Π von absoluten Grössen welche die Forderungen I)—V) bezw. 1)—15) in Nr. 1 befriedigen, vorgelegt.

Dann setzen wir fest, dass jedem eine Lücke anzeigenden Schnitte (P_1, P_2) des Systemes Π eine und nur eine[1]) Grösse S zugeordnet werde, welche grösser als jede zur ersten Gruppe des Schnittes gehörige Grösse P_1, kleiner als jede zur zweiten gehörige Grösse P_2 heissen soll. Das aus den Grössen Π und den neu hinzugefügten Grössen S bestehende System sei mit Σ bezeichnet.

Es lassen sich nun Regeln über die Vergleichung der neuen Grössen S untereinander aufstellen, selbstverständlich unter Beachtung der Forderungen 1)—6). Dabei besteht der Satz 7) auch für das System Σ und es zeigt sich, dass dieses System keine Lücken mehr darbietet [Ford. 16)]. Endlich kann die Summe je zweier Grössen von Σ so erklärt werden, dass die Forderungen 8)—13) erfüllt sind. Das System Σ ist somit stetig.

Für die Arithmetik ist dieser Satz nur insofern von Bedeutung, als man mittelst desselben, wie wir sogleich näher andeuten werden, die irrationalen Zahlen einführen kann. Da wir indess zu diesen Zahlen im VII. Abschnitte auf einem andern Wege gelangen werden, so haben wir den Satz hier nicht nöthig und brauchen daher auf die ziemlich umständliche Begründung desselben[2]) nicht einzugehen.

Einen besonderen Fall des Systemes Π bildet das System der absoluten rationalen Zahlen. Dass es Lücken aufweist lässt sich leicht zeigen. Ist α eine rationale Zahl, welche nicht die m-te Potenz einer andern ist, so ist die m-te Potenz jeder absoluten rationalen Zahl entweder kleiner oder grösser als α. Diese Zahlen zerfallen somit in zwei Gruppen, in Zahlen π_1, deren m-te Potenz kleiner, und in Zahlen π_2, deren m-te Potenz grösser als α ist. Da demnach $\pi_1^m < \pi_2^m$ ist, so ist $\pi_1 < \pi_2$. Durch einen Blick auf den Satz 11) S. 95 erkennen wir ferner, dass weder die erste Gruppe eine grösste, noch die zweite eine kleinste Zahl enthält. Der Schnitt (π_1, π_2) des rationalen Zahlensystems zeigt somit eine Lücke desselben an. Das System der rationalen Zahlen ist demnach nicht stetig. Um es zu einem stetigen Systeme zu ergänzen, ordnet man jeder seiner Lücken eine neue

1) Dieser Zusatz ist wesentlich, denn es könnte dem Schnitte auch mehr als eine Grösse entsprechen.

2) Vgl. O. Stolz, Math. Ann. Bd. 39 S. 109.

Zahl zu. So gelangt man nach R. Dedekind[1]) zu den irrationalen Zahlen.

D. Hilbert[2]) ist der Ansicht, dass das Axiom 16) auf S. 114 in der Lehre von den absoluten reellen Zahlen ersetzt werden könne durch ein neues Axiom des Inhaltes, dass diese Zahlen ein System von Dingen bilden, welches bei Aufrechterhaltung der sämmtlichen übrigen Axiome [d. i. der früher angeführten 1)—15), der Axiome der Multiplication (Satz 1)—5) auf S. 22) und des Axioms von der Existenz des Quotienten] keiner Erweiterung mehr fähig ist. Dasselbe bezeichnet er als das Axiom der Vollständigkeit.

9. Relative Grössen. — Aus jedem Systeme von absoluten Grössen $A\ B\ C \cdots$ lässt sich formell durch das Verfahren der Grössenpaarung eines von relativen Grössen ableiten. Man braucht zu diesem Zwecke nur in III. 13 das System der absoluten rationalen Zahlen $\alpha\ \beta\ \gamma\ \cdots$ durch das vorgelegte System $A\ B\ C\ \cdots$ zu ersetzen. Man kann jedoch die Erweiterung des letzteren Grössensystemes zu einem relativen auch unmittelbar vornehmen, wie wir am Beispiele der relativen Strecken sogleich sehen werden.

Nach der Natur der zu Grunde liegenden absoluten Grössen haben wir auch die relativen Grössen in eigentliche und uneigentliche einzutheilen. Ein Beispiel der letzteren bilden die complexen Zahlen aus zwei Einheiten (vgl. X. 1—4). Jedes System von relativen Grössen erfüllt die Forderungen 1)—10), 12), 14) in Nr. 1, während an Stelle von 13) die ausnahmslose Ausführbarkeit der Subtraction tritt. Kommt dazu noch die Eigenschaft 16) auf S. 114, so heisst das System der relativen Grössen ein stetiges von einer Dimension.

Die relativen Strecken. Wie man aus den absoluten Strecken in Nr. 4 die relativen ableitet, geht aus IV. 5 hervor. Nur hat man jetzt die Strecken AB auf der Geraden XX' lediglich als geometrische Objecte mit Rücksicht auf ihr Zeichen in Bezug auf die in jener Geraden festgesetzte positive Richtung aufzufassen. Daher entfällt die a. a. O. geltende Beschränkung, dass diese Strecken sämmtlich zu einer fest angenommenen commensurabel sein sollen. Ihnen werden die uneigentlichen Strecken AA, unter A irgend einen Punkt

---

1) Stetigkeit u. irrat. Zahlen S. 19. — Die Dedekind'sche Theorie der irrationalen Zahlen ist von J. Tannery angenommen (vgl. Leçons d'Arithmétique 1894 S. 378). M. Pasch (Einleitung in die Diff.- u. Integralrechnung 1882) trägt sie mit der Abänderung vor, dass er den Schnitt durch die „Zahlstrecke" ersetzt.

2) Vgl. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 1900 S. 183, Göttinger Nachrichten 1900 S. 265.

von XX' verstanden, zugesellt, von denen je zwei einander gleich heissen. Zwei eigentliche Strecken AB, $A'B'$ der Geraden XX' heissen dann und nur dann einander gleich, wenn die absoluten Strecken AB, $A'B'$ sich zur Deckung bringen lassen und ausserdem die Richtung von A nach B die nämliche ist, wie die von A' nach B'. Sind die absoluten Strecken $|AB|$, $|A'B'|$ einander gleich, erfolgt jedoch der Uebergang von A zu B in entgegengesetztem Sinne, wie von A' zu B', so heissen die Strecken AB, $A'B'$ einander entgegengesetzt. Die Strecke AB heisst grösser oder kleiner als $A'B'$, je nachdem die Strecke BC, wobei C der Endpunkt der $A'B'$ gleichen Strecke AC ist, negativ oder positiv ist (vgl. Fig. III auf S. 83). Die uneigentliche Strecke AA heisst kleiner als jede positive, grösser als jede negative Strecke. Diese Erklärungen entsprechen den Forderungen 1)—6) auf S. 100.

Erklärung der Summe zweier Strecken. Unter der Summe $AB + DE$ ist zu verstehen die Strecke AC, deren Endpunkt durch die Construction der Strecke $BC = DE$ auf XX' gefunden wird. Insbesondere ist

$$AB + BC = AC.$$

Zufolge dieser Erklärung ist

$$AA + AB = AB \quad AB + BB = AB \quad AA + DD = AA. \tag{1}$$

Die unter sich gleichen uneigentlichen Strecken spielen also die Rolle des Modulus dieser Addition und werden daher sämmtlich durch das Zeichen 0 dargestellt. Demnach erscheinen die Formeln (1) in der Gestalt

$$0 + AB = AB + 0 = AB, \quad 0 + 0 = 0. \tag{2}$$

Wir haben ferner die Formel

$$AB + BA = AA = 0. \tag{3}$$

Aus der Erklärung der Summe ergeben sich unmittelbar die den Forderungen 8)—11) entsprechenden Sätze:

1) Ist $AB = A'B'$, $DE = D'E'$, so ist $AB + DE = A'B' + D'E'$.

2) $(AB + BC) + CD = AB + (BC + CD)$;

denn die linke Seite liefert $AC + CD = AD$, die rechte $AB + BD = AD$.

3) $AB + BC = BC + AB$.

Denn es ist, wie die Figur zeigt, $AC = BD$, falls $CD = AB$ gemacht wird.

4) Ist $BC > BC'$, so ist $AB + BC > AB + BC'$.

Denn da CC' eine negative Strecke ist, so hat man $AC > AC'$.

Der Gleichung $AB + BX = AC$ genügt die Strecke $BX = BC$ und nur sie und die ihr gleichen. Die Subtraction ist somit stets ausführbar und eindeutig; man hat

$$AC - AB = BC.$$

Insbesondere ist zufolge der Formeln (2) und (3)

$$0 - 0 = 0 \quad AB - AB = 0 \quad 0 - AB = BA.$$

Für die letzte Differenz schreibt man $-AB$; es ist also $BA = -AB$.

Man kann, wie die Planimetrie lehrt, jede Strecke AB in n gleiche und mit dem Vorzeichen, das sie selbst hat, versehene Theile:

$$AB_1 = B_1B_2 = \cdots = B_{n-2}B_{n-1} = B_{n-1}B$$

theilen. Es ist also $nAB_1 = AB$, $AB_1 = \frac{1}{n}AB$.

Die vorstehenden Sätze und Formeln gestatten sinngemässe Anwendung auf Strecken in parallelen Geraden, woferne nur die positiven Richtungen in denselben auf gleiche Weise d. i. so angenommen werden, dass sie von der nämlichen Seite einer die gegebenen Geraden schneidenden auf die andere übertreten.

In ähnlicher Art lassen sich die relativen Winkel einführen, vgl. XI. 5.

VI. Abschnitt.

Theorie der Verhältnisse nach Euclid. Ableitung der reellen Zahlen aus denselben.

1. Man sagt von je zweien gleichartigen absoluten Grössen im engeren Sinne, dass die eine ein Verhältniss zur anderen habe (Euclid. V. def. 4). Mithin wird je zweien solcher Grössen, die in eine bestimmte Reihenfolge $A\ B$ gebracht sind, ein neues Object zugeordnet, welches das Verhältniss A zu B heisst und die Bezeichnung $A:B$ erhält. A heisst das Vorderglied, B das Hinterglied. Die Verhältnisse gleichartiger Grössen entstehen also aus ihnen durch das schon in III. 7 eingeführte Verfahren der Paarung und können daher auch Grössenpaare genannt werden. Die Bezeichnung (A, B) wäre sogar der gebräuchlichen $A:B$ vorzuziehen[1]), lässt sich aber jetzt kaum mehr durchführen. — Unser Ding ist noch ohne Eigenschaften, kann also solche erhalten — und zwar in verschiedener Weise — nach dem schon im 3. Abschnitte angewandten Verfahren, indem wir es zuerst zu einer Grösse machen und dann Verknüpfungen zwischen den neuen Grössen definiren. Im folgenden sollen $A, B, C \cdots$ gleichartige absolute Grössen im engeren Sinne, $a, b, c \cdots$ natürliche, $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ absolute rationale Zahlen, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \cdots$ Verhältnisse bedeuten.

Wir können zunächst festsetzen, es soll $A:B$ gleich, grösser, kleiner als $A':B'$ sein, je nachdem $A + B'$ gleich, grösser, kleiner als $B + A'$. Die formalen Bedingungen nach I. 2, 5 sind erfüllt (vgl. III. 3 und 10), somit die Definitionen zulässig. Ferner wollen wir das Verhältniss $(A + A'):(B + B')$ als Summe von $A:B$ und

---

1) Wenn man unter den eigentlichen absoluten Grössen $A, B, C \cdots$ nicht gerade die absoluten Zahlen versteht, so wird von der Division derselben nicht die Rede sein, dann kann also das Verhältniss $A:B$ nicht mit einem Quotienten verwechselt werden. Versteht man aber unter $A, B, C \cdots$ die absoluten Zahlen, so darf man das arithmetische Verhältniss von $A:B$ nicht mit $A:B$ bezeichnen, weil dasselbe vom Quotienten $A:B$ verschieden ist; man muss dafür (A, B) schreiben.

$A' : B'$ bezeichnen, wobei, wie man wie a. a. O. finden wird, dieselben Sätze gelten, wie bei der Addition der relativen Zahlen (III. 13) und der relativen Grössen (V. 9). Die Subtraction ist auch hier stets möglich und zwar nur auf eine Weise. — Die dergestalt bestimmten Verhältnisse hat man arithmetische genannt. Das arithmetische Verhältniss stellt eine Erweiterung der Differenz $A - B$ auf den Fall wo $A \gtreqless B$, dar und ist daher entbehrlich, wenn eine solche bereits dadurch erzielt ist, dass aus den absoluten Grössen $A, B, C \cdots$ relative abgeleitet wurden.

Wir wenden uns nun zur Aufstellung der geometrischen Verhältnisse, welche in der Geometrie der Alten als Ersatz für die irrationalen Zahlen unentbehrlich waren. Und zwar wollen wir ihre Theorie zunächst in der Gestalt vorführen, wie sie im 5. Buche der Euclid'schen Elemente vorliegt. — In Zukunft ist unter „Verhältnis" immer das „geometrische" zu verstehen.

2. In V. 3 ist bemerkt, dass man unter dem Verhältnisse zweier commensurabelen Grössen $A = aM$, $B = bM$ den Quotienten $\frac{a}{b}$ verstehe. Daraus folgt, dass wenn $\alpha\ \beta$ beliebige absolute rationale Zahlen bedeuten und $A = \alpha M$, $B = \beta M$ ist, das Verhältniss $A : B$ die Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$ sei. Insbesondere heisst der Quotient $\frac{a}{b}$ das Verhältniss der ganzen Zahl a zur ganzen Zahl b, der Quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ das Verhältniss der Zahl α zur Zahl β.

Stellen wir neben $A\ B$ ein zweites Paar commensurabeler, aber nicht nothwendig mit ihnen gleichartiger Grössen A', B' — es sei $A' = a'M'$, $B' = b'M'$ —, so nennt man $A : B$ gleich, grösser, kleiner als $A' : B'$, je nachdem die Zahl $\frac{a}{b}$ gleich, grösser, kleiner als $\frac{a'}{b'}$. Ist $A = B$, $A' = B'$, so ist demnach $A : B = A' : B'$. Je zwei gleiche Grössen stehen zu einander im „Verhältnisse der Gleichheit".

Um die Definition der gleichen Verhältnisse auf Paare incommensurabeler Grössen zu erweitern, suchen wir zunächst eine solche Eigenschaft von zwei commensurabelen Grössenpaaren AB, $A'B'$, deren Verhältnisse einander gleich sind, auf, welche auch dann einen Sinn hat, wenn die Paare incommensurabel sind. Es sei also $A = aM$, $B = bM$; $A' = a'M'$, $B' = b'M'$ und $ab' = a'b$. Bezeichnen m, n irgend zwei natürliche Zahlen, so wird ma entweder gleich oder grösser oder kleiner als nb sein. Multiplicirt man beide Seiten jeder dieser Relationen mit b' und dividirt dann durch b, so findet man

entsprechend ma' gleich, grösser, kleiner als nb'. Mithin ist wegen $bA = aB$, $b'A' = a'B'$ neben

$$mA \gtreqless nB \quad \text{simultan} \quad mA' \gtreqless nB'.$$

Dieser Satz gestattet die folgende Umkehrung, welche für unseren Zweck unerlässlich ist.

Satz. „Angenommen dass für alle Paare pq von relativen Primzahlen mit Ausnahme eines einzigen gh den Relationen $pA \gtrless qB$ entsprechen die folgenden: $pA' \gtrless qB'$, während für das letztere Paar die Gleichung $gA = hB$ besteht, so muss auch $gA' = hB'$ sein."

Beweis. Bedeutet m eine beliebige durch g nicht theilbare Zahl, nur so gewählt dass $mA > B$, so kann mA kein Vielfaches von B sein, so dass nach V. 2 eine ganze Zahl n existirt, wofür $nB < mA < (n+1)B$. Daraus folgt durch Multiplication mit g vermöge der Gleichung $gA = hB$ $ng < mh < (n+1)g$ und ferner zufolge Voraussetzung $nB' < mA' < (n+1)B'$. Nun kann man nach V. 6 zeigen, dass $gA' = hB'$. Wäre nämlich $A' > \frac{h}{g}B'$, so hätte man

$$A' - \frac{h}{g}B' < \frac{n+1}{m}B' - \frac{n}{m}B' = \frac{B'}{m}.$$

Da m so gross angenommen werden kann, dass $\frac{1}{m}B'$ kleiner ist als eine beliebige mit $A'B'$ gleichartige Grösse D', so wäre dieser Unterschied kleiner als D'. Somit muss $A' \leqq \frac{h}{g}B'$ sein. Es kann aber auch A' nicht $< \frac{h}{g}B'$ sein, da auch $\frac{h}{g}B' - A' < \frac{B'}{m}$ sein müsste. Folglich bleibt nur übrig, dass $gA' = hB'$ ist.

Nunmehr können wir die folgende Definition aufstellen:

Def. 1. Bezeichnen m, n irgend ein Paar natürlicher Zahlen, so dass $mA \gtrless nB$, und ist simultan mit diesen Relationen $mA' \gtrless nB'$, so sollen die Verhältnisse $A : B$ und $A' : B'$ einander gleich sein. (Eucl. V. Def. 5.)[1]

Die formalen Bedingungen von I. 2 sind hier erfüllt. 1) Ist $A : B = A' : B'$, so ist auch $A' : B' = A : B$. Bedeuten m' n' zwei beliebige ganze Zahlen, nur so gewählt, dass $m'A'$ und $n'B'$ ungleich sind, so kann nicht $m'A = n'B$ sein, da dann nach dem obigen Satze $m'A' = n'B'$ sein müsste. Ist aber $m'A \gtrless n'B$, so muss zu-

---

1) Euclid bezeichnet die Gleichheit der Verhältnisse als ταυτότης oder ὁμοιότης τῶν λόγων; doch kommt schon im Alterthume der Ausdruck ἰσότης λόγων vor (vgl. Hankel, z. Gesch. d. Math. S. 395). Bei Vergleichung von Verhältnissen wird manchmal das Zeichen :: anstatt = gebraucht.

folge der Voraussetzung entsprechend $m'A' \gtrless n'B'$ sein. Mithin hat man neben $m'A' \gtrless n'B'$ stets entsprechend $m'A \gtrless n'B$. Unmittelbar ergiebt sich: 2) Ist $A : B = A' : B'$ und $A' : B' = A'' : B''$, so ist $A : B = A'' : B''$ (Eucl. V. prop. 11). 3) Ist $A = A'$, $B = B'$, so ist $A : B = A' : B'$ (l. c. prop. 7).

Corollare. 1) „Ist das Verhältniss zweier Grössen A B gleich dem Verhältnisse der natürlichen Zahlen a b d. i. hat man $A : B = a : b$, so sind die Grössen A, B commensurabel“ (Eucl. El. X. prop. 6). Denn wenn stets neben

$$ma \gtrless nb \quad \text{entsprechend} \quad mA \gtrless nB$$

ist, so hat man zufolge des vorstehenden Satzes neben $ba = ab$ $bA = aB$. Wird $A = aM$ gesetzt, so ist mithin $B = bM$. — Aus diesem Corollare ergiebt sich unmittelbar:

2) „Incommensurabele Grössen können sich nicht verhalten wie natürliche Zahlen“ (a. a. O. prop. 7). Denn wäre ihr Verhältniss einem Zahlenverhältnisse gleich, so wären sie eben commensurabel.

3) „Ist $A : B = A' : B'$ und die Grössen A, B sind commensurabel (ist also $A = aM$ $B = bM$), so sind auch die Grössen A', B' commensurabel und zwar sind, wenn $A' = a'n'$, $B' = b'n'$ gesetzt werden kann, die Brüche a/b a'/b' einander gleich.“ — Da $bA = aB$, so ist nach dem obigen Satze $bA' = aB'$. Setzt man nun $A' = aN$, so folgt, dass $B' = bN$ ist. Daher besteht nach einer Bemerkung auf S. 105 die Gleichung $a/b = a'/b'$.

3. Das grössere Verhältniss. — Wenn die Grössenpaare AB, $A'B'$ commensurabel sind, so hat man, wie oben bemerkt, $A : B > A' : B'$ falls $ab' > a'b$. Lassen wir wieder m, n beliebige Zahlen sein, so ergiebt sich leicht: 1) Ist

$$\frac{a}{b} > \frac{n}{m} > \frac{a'}{b'},$$

so hat man neben $mA > nB$, $mA' < nB'$; 2) ist $\frac{n}{m} = \frac{a}{b}$, so neben $mA = nB$ $mA' < nB'$ und wenn $\frac{n}{m} = \frac{a'}{b'}$, so neben $mA > nB$ $mA' = nB'$; 3) ist $\frac{n}{m} > \frac{a}{b}$, so hat man neben $mA < nB$ $mA' < nB'$ und wenn $\frac{n}{m} < \frac{a'}{b'}$, so neben $mA > nB$ auch $mA' > nB'$.

Wie diese Relationen zusammenhängen, lehren die folgenden Sätze: 1) „Giebt es ein Zahlenpaar m, n, so dass neben

$$mA \geqq nB \qquad mA' \leqq nB', \tag{a}$$

so ist stets neben

$$pA < qB \qquad pA' < qB'.\text{“}$$

Denn aus $pA < qB$ folgt

$$pnA < qnB \leqq qmA,$$

also $pn < qm$ und somit

$$pnA' < qmA' \leqq qnB',$$

also $pA' < qB'$. — 2) Auf ähnliche Weise wird gezeigt, dass wenn neben den Beziehungen (a), die Annahme $mA = nB \quad mA' = nB'$ aber ausgeschlossen, die Beziehung $pA = qB$ besteht, alsdann auch $pA' < qB'$ sein muss. — 3) Ist neben

$$kA > lB \qquad kA' = lB',$$

so giebt es auch Zahlenpaare m, n, so dass neben

$$mA > nB \qquad mA' < nB'.\text{“}$$

Denn zwischen $\frac{l}{k} B$ und A liegen unzählige Grössen $\frac{n}{m} B$ (Satz 11) auf S. 105), also hat man $mA > nB$ und $\frac{l}{k} < \frac{n}{m}$, somit $A' = \frac{l}{k} B' < \frac{n}{m} B'$ d. i. $mA' < nB'$.

Das Vorstehende hat geführt zu

Def. 2 (Eucl. V. def. 7). „Es steht A im grösseren (kleineren) Verhältnisse zu B, als A' zu B', wenn mindestens ein Zahlenpaar m, n existirt, so dass zugleich

$$mA \geqq nB \quad mA' \leqq nB' \qquad (mA \leqq nB \quad mA' \geqq nB')$$

ist, jedoch nicht in beiden Beziehungen das Gleichheitszeichen steht.“[1])

Die formalen Forderungen von I. 5 sind erfüllt. 1) Aus $A : B > A' : B'$ folgt $A' : B' < A : B$. 2) Die aufgestellte Disjunction unter den Verhältnissen ist vollständig. — Betrachtet man nämlich zunächst solche Zahlenpaare mn, dass $mA > nB$, so hat man entweder einmal $mA' \leqq nB'$ — d. i. $A : B > A' : B'$ — oder es ist stets $mA' > nB'$. Geht man nun über zu solchen Paaren, welche $mA < nB$ liefern, so ist entweder einmal $mA' \geqq nB'$ — d. i. $A : B < A' : B'$ oder durchaus auch $mA' < nB'$, in welchem Falle man nach der 1. Def. $A : B = A' : B'$ setzt. 3) Aus $A : B = A' : B'$ und $A' : B' > A'' : B''$ folgt $A : B > A'' : B''$ (Eucl. V. prop. 13). Denn nach Voraussetzung giebt es solche Zahlen m', n', dass neben $m'A' \geqq n'B' \quad m'A'' \leqq n'B''$ (b). Zufolge der Gleichung $A : B = A' : B'$ muss aber neben $m'A' > n'B'$ entsprechend $m'A \geqq n'B$ sein; denn wäre $m'A < n'B$, so würde auch $m'A' < n'B'$ sein. Wir haben also neben $m'A \geqq n'B \quad m'A'' \leqq n'B''$, somit, da hier ebensowenig als bei (b) das Gleichheitszeichen beidemal stehen kann, $A : B > A'' : B''$.

1) Wie der unmittelbar vorhergehende Satz 3) an die Hand giebt, hätten wir die Gleichheitszeichen in diesen Beziehungen weglassen können. Wir haben sie beibehalten, um auch für den Fall, dass eines den beiden Grössenpaare AB, $A'B'$ commensurabel, das andere incommensurabel ist, die einfachsten Regeln zur Vergleichung der Verhältnisse $A : B$ und $A' : B'$ anzuführen.

4) Aus $A:B > A':B'$ und $A':B' > A'':B''$ folgt $A:B > A'':B''$. Vermöge der Ungleichung $A:B > A':B'$ giebt es Zahlen m, n, so dass neben $mA \geqq nB$ $mA' \leqq nB'$ ist, und vermöge der Ungleichung $A':B' > A'':B''$ solche m', n', dass neben $m'A' \geqq n'B'$ $m'A'' \leqq n'B''$ ist. Ist $mA' < nB'$, so muss zufolge des obigen Satzes 1) $mA'' < nB''$ sein, die gleiche Beziehung gilt nach dem Satze 2) auch, falls $mA' = nB'$ sein sollte; denn es können nicht zugleich $m'A' = n'B'$ $m'A'' = n'B''$ sein, weil dann $A':B' = A'':B''$ wäre. Wir haben also stets neben $mA \geqq nB$ $mA'' < nB''$ d. i. $A:B > A'':B''$.

4. Erste Gruppe von Sätzen über Proportionen und Ungleichungen.[1]) — Gleichungen zwischen Verhältnissen heissen Proportionen.[2]) Sind A und B ungleiche Grössen, so sind die Verhältnisse $A:B$ und $B:A$ von einander verschieden und zwar ist neben $A > B$ $A:B > B:A$. Das Verhältniss $B:A$ heisst das umgekehrte von $A:B$. Unmittelbar aus den vorhergehenden Definitionen folgen die Sätze:

1) „Ist $A:B \geqq A':B'$, so hat man entsprechend $B:A \leqq B':A'$."

Bezeichnen α β absolute rationale Zahlen, so hat man: 2) „$A:B = \alpha A : \alpha B$ (V. 15); 3) neben $A:B \geqq A':B'$ entsprechend $\alpha A : \beta B \geqq \alpha A' : \beta B'$" (V. 4).[3]) — Der Satz 2) und 3) im Falle, dass das Zeichen $=$ steht, leuchten unmittelbar ein. Ist aber $A:B > A':B'$, so giebt es zwei ganze Zahlen m, n derart, dass neben $mA > nB$ $mA' < nB'$ ist. Dann muss nach Satz 1) in Nr. 3 neben $p\alpha A < q\beta B$ stets $p\alpha A' < q\beta B'$ sein. Wäre nun, falls die ganzen Zahlen p q so gewählt sind, dass $p\alpha A > q\beta B$ ist, immer auch $p\alpha A' > q\beta B'$, so würden nach der 1. Def. auf S. 122 die Verhältnisse $A:B$ und $A':B'$ einander gleich sein. Da dies nicht der

---

1) Hinsichtlich der Ungleichungen unter den Verhältnissen vgl. die Dissertation von C. J. Hauber: Propositionum de rationibus inter se diversis demonstrationes etc. Tubingae 1793.

Die Sätze in Nr. 4 und 5 sind nach Euclid's Vorgang begründet, ohne vom Satze in Nr. 6 Gebrauch zu machen.

Zur Begründung des Rechnens mit den Verhältnissen (vgl. Nr. 9) bedarf man aller Sätze der Nr. 4 mit Ausnahme des 8. und dazu der Sätze 1) und 2) in Nr. 5.

Einige minder wichtige Sätze aus der 1. Gruppe sind auf S. 136 unter 6)—11) angeführt.

2) Die Gleichheit zweier Verhältnisse heisst bei Euclid (V. def. 4) ἀναλογία, welches Wort seit Boethius mit proportionalitas übersetzt worden ist. Das Verhältniss (λόγος) heisst bei letzterem proportio; der Gebrauch des Wortes ratio in diesem Sinne ist neuern Ursprungs (Hankel a. a. O. S. 389).

3) Die eingeklammerten Verweise beziehen sich auf die Sätze des 5. Buches der Euclid'schen Elemente.

Fall sein soll, so muss es ein Zahlenpaar $p'q'$ geben, derart dass neben $p'\alpha A > q'\beta B$ $p'\alpha A' < q'\beta B$ ist. Demnach ist $\alpha A : \beta B > \alpha A' : \beta B'$.

4) „Ist $A > A'$, so ist $A : B > A' : B$“ (V. 8). Nach V. 2 giebt es Grössen $\frac{n}{m} B$, sodass $A > \frac{nB}{m} > A'$; also hat man neben $mA > nB$ $mA' < nB$ d. i. $A : B > A' : B$. Daraus folgt nach I. 10:

5) „Ist $A : B \gtreqq A' : B$, so ist entsprechend $A \gtreqq A'$.“ (V. 9 und 10.) Ist $A : B > A : B'$, so ist $B < B'$.

6) „Aus $A : B = A' : B'$ folgt

$$(A \pm B) : A = (A' \pm B') : A' \text{ und } (A \pm B) : B = (A' \pm B') : B',$$

wobei im Falle des unteren Zeichens $A > B$ vorauszusetzen ist“ (V. 18 und 17). Wenn $p \geqq q$, so ist sowohl $p(A + B) > qA$, als auch $p(A' + B') > qA'$. Ist aber $p < q$, so hat man neben $p(A + B) \gtrless qA$ entsprechend $pB \gtrless (q - p) A$, somit hier entsprechend $pB' \gtrless (q - p) A'$, also $p(A' + B') \gtrless qA'$. Demnach ist in der That $(A + B) : A = (A' + B') : A'$ u. s. w.

7) „Aus $A : B > A' : B'$ folgt $(A + B) : B > (A' + B') : B'$ und $(A + B) : A < (A' + B') : A'$.“ (Archimedes de sphaera etc. I. prop. 3.) — Aus $mA > nB$ neben $mA' < nB'$ ergiebt sich $m(A + B) > (m + n) B$ neben $m(A' + B') < (m + n) B'$. Somit ist $(A + B) : B > (A' + B') : B'$. Aus dieser Ungleichung folgt die zweite unmittelbar zufolge Satz 1).

8) „Aus $A : B < A' : B'$ und $A > B$ folgt (nach dem 1. Satze in Nr. 3) $A' > B'$ und $(A - B) : B < (A' - B') : B'$ (Archimedes l. c. I. prop. 7), sowie $(A - B) : A < (A' - B') : A'$.“ Die erste Ungleichung wird indirect mittelst der Sätze 6) und 7) bewiesen. Aus ihr folgt, dass $B : (A - B) > B' : (A' - B')$, und daraus zufolge der Sätze 7) und 1) die zweite Ungleichung.

9) „Aus $A : B = A' : B'$ und $B : C = B' : C'$ folgt neben $A \gtreqless C$ entsprechend $A' \gtreqless C'$“ (V. 20). Ist z. B. $A > C$, so hat man nach dem 4. Satze $A : B > C : B$, also $A' : B' > C' : B'$ und nach dem 5. $A' > C'$.

10) „Aus $A : B = A' : B'$ und $B : C = B' : C'$ folgt

$$A : C = A' : C'“$$

(V. 22). — Denn bedeuten p q irgend zwei natürliche Zahlen, so hat man nach dem 3. Satze

$$pA : B = pA' : B' \qquad B : qC = B' : qC',$$

somit nach dem 9. neben $pA \gtrless qC$ entsprechend $pA' \gtrless qC'$ d. i. $A : C = A' : C'$. — Auf ähnliche Art wie der 9. Satz ergiebt sich:

11) „Aus

$$A : B \gtreqq A' : B' \qquad B : C \gtreqq B' : C'$$

(worin jedoch das Zeichen $=$ nur einmal vorkommen soll) folgt, wenn $A \leqq C$, $A' < C'$."

12) „Aus

$$A : B > A' : B' \qquad B : C = B' : C'$$

folgt $A : C > A' : C'$." — Was auch $p\ q$ für natürliche Zahlen sein mögen, so hat man

$$pA : B > pA' : B' \qquad B : qC = B' : qC',$$

also nach dem 11. Satze neben $pA < qC$ stets $pA' < qC'$. Somit muss $A : C$ entweder grösser oder gleich $A' : C'$ sein. Das letztere ist indess nicht möglich, da nach dem 10. Satze $A : B = A' : B'$ sein müsste. — Man kann den Satz ohne Mühe dahin erweitern, dass in den erstgenannten Relationen irgend eines der Zeichen $=\ >$, nur nicht beide Male $=$, vorkommen darf.

13) „Aus

$$A : M = A' : M' \qquad B : M = B' : M'$$

folgt

$$(A \pm B) : M = (A' \pm B') : M',$$

im Falle des unteren Zeichens $A > B$ vorausgesetzt" (V. 24). — Nach dem 10. Satze ist $A : B = A' : B'$, also nach dem 6.)

$$(A \pm B) : A = (A' \pm B') : A',$$

woraus durch nochmalige Anwendung von 10) die neue Proportion folgt.

14) „Aus

$$A : M = A' : M' \qquad B : M > B' : M'$$

folgt

$$(A + B) : M > (A' + B') : M'."$$

Der Satz hängt mit dem 7) und 11) ebenso zusammen, wie der vorige mit dem 6) und 10).

5. Zweite Gruppe von Sätzen über Proportionen und Ungleichungen. Alle Glieder derselben müssen gleichartig sein. — Sind das zweite und dritte Glied einer Proportion einander gleich, so heisst sie stetig.

1) „Ist $A : B = A' : B'$ und $A \gtreqless A'$, so hat man entsprechend $B \gtreqless B'$" (V. 14). — Ist z. B. $A > A'$, so hat man $A : B > A' : B$. Folglich ist $A' : B' > A' : B$, daher nach dem 5. Satze in Nr. 4 $B' < B$.

2) „Ist $A : B = A' : B'$, so ist auch $A : A' = B : B'$" (V. 16). — Nunmehr ist nämlich für jedes Paar m, n von natürlichen Zahlen $mA : mB = nA' : nB'$, also zufolge des vorigen Satzes neben $mA \gtrless nA'$ entsprechend $mB \gtrless nB'$. Demnach besteht die Proportion $A : A' = B : B'$.

Mit Hilfe der Sätze 1) in Nr. 2 und 4 und dieses Satzes lassen sich aus jeder Proportion, deren Glieder gleichartig und von einander verschieden sind, durch Versetzung derselben sieben andere ableiten.

3) „Ist $A : B > A' : B'$, so hat man neben $A \leqq A'$ $B < B'$.“ — Aus $A \leqq A'$ folgt nämlich $A : B \leqq A' : B$. Daher ist $A' : B' < A' : B$, somit $B' > B$.

4) „Aus der Ungleichung $A : B > A' : B'$ folgt die weitere $A : A' > B : B'$.“ — Aus der ersteren ergiebt sich nach dem 2. Satze $mA : mB > nA' : nB'$ und nach dem vorhergehenden, dass neben $mA < nA'$ $mB < nB'$ sein muss. Wären die Zahlen m n so gewählt, dass $mA > nA'$ ist, so könnte doch nicht für jedes Paar $mB > nB'$ sein, weil unter dieser Voraussetzung $A : A' = B : B'$, folglich $A : B = A' : B'$ sein würde. Es muss demnach mindestens ein Paar m, n geben derart, dass neben $mA > nA'$ $mB \leqq nB'$ ist. Mithin ist $A : A' > B : B'$.

5) „Aus $A : B = A' : B'$ folgt

$$(A \pm A') : (B \pm B') = A : B,$$

im Falle des unteren Zeichens $A > A'$ vorausgesetzt“ (V. 12 und 19). — Folgt mittelst des 2. Satzes aus dem 6) in Nr. 4. Auf ähnliche Weise wird der folgende Satz aus dem 7) in Nr. 4 abgeleitet.

6) „Ist $A : B > A' : B'$, so hat man

$$A : B > (A + A') : (B + B') > A' : B'.“$$

6. Die vierte Proportionale zu drei gegebenen Grössen. — Bezeichnen α, β, γ gegebene absolute rationale Zahlen, so wird zufolge Nr. 2 die Proportion $\xi : \alpha = \beta : \gamma$ durch die Zahl $\xi = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ befriedigt.

Satz.[1]) „In einem stetigen Grössensysteme giebt es zu einer Grösse A eine und nur eine Grösse X, so dass das Verhältniss $X : A$ gleich ist einem gegebenen $B : C$, wobei B, C mit A nicht gleichartig zu sein brauchen.“ D. i. $X : A = B : C$. X heisst die vierte Proportionale zu den Grössen A, B, C.

Beweis. Ist $B = C$, so ist $X = A$. Wenn B C ungleich sind z. B. $B > C$, so würde bei der Annahme, dass es keine solche Grösse X gebe, eine Lücke in dem Grössensysteme A, P sich zeigen. Nunmehr ist $P : A$ entweder kleiner oder grösser als $B : C$. Ersteres tritt sicher ein wenn $P < A$, letzteres wenn $P > pA$, wo die Zahl p so gewählt ist, dass $B < pC$. Bilden wir mit den Grössen P_1,

1) Einen ähnlichen Beweis dieses Satzes hat J. M. Hill gegeben und daran in derselben Weise, wie es in Nr. 8 und 9 geschieht, die Addition und die Zusammensetzung der Verhältnisse geknüpft. (Cambridge Philosophical Transactions V. XVI [1897] S. 244 f.) Vgl. auch dessen neues Buch: The contents of the fifth and sixth Books of Euclid. Cambridge 1900.

wofür $P_1 : A < B : C$ die erste, aus den Grössen P_2, wofür $P_2 : A > B : C$ die zweite Gruppe, so können wir an ihnen leicht die in V. 7 im Falle einer Lücke verlangten Eigenschaften nachweisen. So giebt es, wenn wir P_1 nun eine bestimmte Grösse der ersten Gruppe sein lassen, darin Grössen, die P_1 überschreiten. Da $P_1 : A < B : C$, so existiren Zahlen m n sodass neben

$$mP_1 < nA \qquad mB > nC.$$

Zufolge einer Bemerkung auf S. 115 verfügt man über solche Grössen D, dass

$$mD < nA - mP_1$$

ist. Man hat daher

$$m(P_1 + D) < nA$$

neben $mB > nC$, also ist $(P_1 + D) : A < B : C$. Auf ähnliche Weise kann man in der 2. Gruppe zu jeder Grösse eine kleinere nachweisen.[1])

7. Zusammengesetzte Verhältnisse. Satz. „Es seien zwei Verhältnisse $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gegeben. Bestimmt man zu einer beliebigen Grösse M eines stetigen Systemes von absoluten Grössen eine Grösse N, so dass $M : N = \mathfrak{a}$, und zu N eine Grösse P, so dass $N : P = \mathfrak{b}$, so ist das Verhältniss $M : P$ eine von M unabhängige Grösse.“ Denn ist

$$\mathfrak{a} = M : N = M' : N' \qquad \mathfrak{b} = N : P = N' : P',$$

so hat man nach dem 10. Satze in Nr. 4 $M : P = M' : P'$. Jedes der Verhältnisse $M : P = M' : P' = \cdots$ heisst aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zusammengesetzt[2]) und wird mit $\mathfrak{ab}$ bezeichnet.

Dabei gelten die Sätze:

1) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$ so ist $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ (10. Satz in Nr. 4).

2) $(\mathfrak{ab})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{bc})$. — Setzt man $\mathfrak{c} = P : Q$, so ist

$$(\mathfrak{ab})\mathfrak{c} = (M : P)(P : Q) = M : Q.$$

Andererseits hat man $\mathfrak{bc} = N : Q$, also ebenfalls

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{bc}) = (M : N)(N : Q) = M : Q.$$

3) $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba}$. — Bestimmt man die Grösse R so, dass $M : N = P : R$ ist, so ist $\mathfrak{ba} = (N : P)(P : R) = N : R$. Nach dem 2. Satze in Nr. 5 besteht aber auch die Proportion $M : P = N : R$ d. h. es ist $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba}$.

---

1) Darf man von der hier benutzten Definition des stetigen Grössensystemes keinen Gebrauch machen, so wird der Satz von Nr. 6 manchmal als Grundsatz aufzustellen sein. Als solcher kommt er vor in Euclid's Elem. z. B. XII. prop. 2 und liegt seinem Begriffe des zusammengesetzten Verhältnisses zu Grunde. An der ersteren Stelle hätte die Geometrie der Alten davon absehen können, wie C. F. Pfleiderer (de dimensione circuli Pars II. (1790) § 48) und auf eine andere Art der Verfasser (Math. Annalen XXII, S. 517) gezeigt hat.

2) Euclid. Elem. VI. Def. 5. Der 1. und 3. der folgenden Sätze bei R. Simson, The Elements of Euclid 1767, p. 143. — Bei Zusammensetzung der reducirten Verhältnisse von ganzen Zahlen $a : b$, $c : d$ lässt man das vermittelnde Glied n ein gemeinschaftliches Vielfache von b c sein.

8. Die geometrischen Verhältnisse als Zahlen. — Bei den bis jetzt vorgeführten Begriffen sind die Griechen und das Mittelalter stehen geblieben. Erst Descartes bahnte durch seine Géométrie (1637)[1]) eine neue Auffassung der Lehre von den geometrischen Verhältnissen an. Er lehrte zuerst das Rechnen mit den Linien (d. i. Strecken). Die Addition und Subtraction derselben haben wir schon in V. 4 angeführt. Um ihre Multiplication zu erklären, wählte er eine beliebige Strecke E, welche er die Einheit nannte, aus und bezeichnete die vierte Proportionale zu den Strecken A, B, E d. i. die Strecke X, welche die Proportion $X:A=B:E$ befriedigt, als das Product der Strecken A und B. Demgemäss erscheint ihm als Quotient $A:B$ die Strecke Y aus der Proportion $Y:A=E:B$. Jedoch als Zahlen betrachtete Descartes die Linien im Allgemeinen nicht.[2]) Seine Streckenrechnung hat indess die Auffassung aller Strecken als Zahlen bei Festsetzung einer bestimmten als Einheit nahegelegt. Wir treffen diese Ansicht jedenfalls schon bei Newton, welcher die absolute Zahl in folgender Weise definirt:[3]) „Per numerum abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, quae pro unitate habetur, rationem intelligimus.“ Vom Rechnen mit diesen Zahlen spricht Newton eigentlich nicht, wohl aber von dem mit den Linien, deren Multiplication er nach Descartes erklärt. Man braucht jedoch, um das Rechnen mit den Zahlen zu erhalten, nur von den Linien zu ihren Verhältnissen zur Einheit überzugehen. Dasselbe bildet einen besondern Fall des in der nächsten Nummer vorgeführten Rechnens mit den Verhältnissen von je zwei Grössen eines stetigen Grössensystems.

Sind die Grössen A B commensurabel, so kann $A=aM$, $B=bM$ gesetzt werden. Dabei ist die Zahl a/b von der Wahl des gemeinsamen Maasses der beiden Grössen A B unabhängig (V. 3). Wir ordnen nun dem Verhältnisse $A:B$ die Zahl a/b zu.[4]) Alsdann entspricht vermöge des 3. Cor. auf S. 123 allen Verhältnissen, welche dem in Rede stehenden $A:B$ gleich sind, die nämliche Zahl a/b. Nachdem dies geschehen ist, wird man auch allen Verhältnissen, die dem zweier incommensurabelen Grössen A B gleich sind, eine absolute Zahl entsprechen lassen. Da sie nach Nr. 2 eine rationale Zahl nicht sein kann, so wird sie als eine incommensurabele oder

---

1) Deutsch von L. Schlesinger 1894. Sie beginnt mit der Linienrechnung.

2) In den Noten von F. de Beaune zur Geometrie des Descartes (vgl. die von F. v. Schooten 1659 besorgte Ausgabe derselben I. S. 107) wird bemerkt, dass die Zahlen die Verhältnisse incommensurabeler Grössen nicht auszudrücken vermögen.

3) J. Newton, Arithmetica universalis ed. Gravesande 1732 S. 4—6.

4) Vgl. hierzu die Note auf S. 151.

irrationale Zahl bezeichnet. So ist jedem Verhältnisse eine reelle Zahl zugeordnet, welche sein Exponent oder Index heisst. Dem grösseren Verhältnisse soll die grössere Zahl entsprechen. Mit Hilfe des Satzes in Nr. 6 lässt sich nun zeigen, dass man mit diesen Verhältnissen auf die nämliche Weise rechnen kann, wie mit den absoluten rationalen Zahlen.

9. Das Rechnen mit den geometrischen Verhältnissen.

Addition und Subtraction. Nach Nr. 6 kann man jedes Verhältniss in eines mit gegebenem Hintergliede M verwandeln. Setzt man nun

$$\mathfrak{a} = P : M \qquad \mathfrak{b} = Q : M,$$

so ist nach dem 13. Satze in Nr. 4 das Verhältniss $(P + Q) : M$ eine von M unabhängige Grösse, die wir als die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ bezeichnen. — Durch Wiederholung der Schlüsse in III. 12 erkennt man, dass diese Addition denselben Regeln genügt, wie die der natürlichen Zahlen und dass die Differenz $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ stets möglich und eindeutig ist, wenn $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$.

Unter $m\mathfrak{a}$ versteht man das m-fache von $\mathfrak{a}$ d. i. das Verhältniss $mP : M$, unter $\frac{m}{n}\mathfrak{a}$ das Verhältniss $\frac{m}{n}P : M$, welches man als den n-ten Theil von $m\mathfrak{a}$ betrachten kann. — Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, so giebt es stets Vielfache von $\mathfrak{b}$, die grösser als $\mathfrak{a}$ sind. Bestimmt man nämlich die ganze Zahl p so, dass $pQ > P$, so ist $p\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$. — Die geometrischen Verhältnisse gehören somit zu den absoluten Grössen im engeren Sinne.

Multiplication und Division. Das aus den Verhältnissen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zusammengesetzte heisse ihr Product: $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$.[1]) Es ist demnach, wenn die Strecke X aus der Proportion $X : A = B : E$ entnommen wird, in der That entsprechend der obigen Regel von Descartes

$$X : E = (X : A)\,(A : E) = (B : E) \cdot (A : E).$$

Dass neben $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$ $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}'$ ist, besagt der Satz 1) in Nr. 7.

Die eine Seite des distributiven Gesetzes, nämlich die Formel

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} \tag{1}$$

erhellt sofort, wenn

$$\mathfrak{a} = P : M \qquad \mathfrak{b} = Q : M \qquad \mathfrak{c} = M : R \tag{2}$$

gesetzt werden. Denn es ist

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = (P + Q) : R, \quad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = P : R, \quad \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} = Q : R,$$

---

1) Die Zusammensetzung der Verhältnisse scheint in älterer Zeit bisweilen als eine Addition aufgefasst worden zu sein. Dann würden aber nicht durchweg dieselben Sätze gelten, wie für die absoluten rationalen Zahlen. Man hat nämlich $(A : B)\,(B : C) < A : B$, wenn $B < C$ ist.

folglich $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}=(P+Q):R$. Die andere Seite des distributiven Gesetzes, die Formel

$$\mathfrak{c}\cdot(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}+\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}, \tag{3}$$

lässt sich direkt nicht so einfach nachweisen (vgl. S. 137, 16)); es ist dies aber auch nicht nöthig, da zufolge des Satzes 3) in Nr. 7 für die in Rede stehende Multiplication das commutative Gesetz besteht. Das associative endlich liegt im Satze 2) daselbst.

Dass endlich neben

$$\mathfrak{a}>\mathfrak{a}' \qquad \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}>\mathfrak{a}'\mathfrak{b},$$

zeigt der 12. Satz in Nr. 4.

Die Gleichung $\mathfrak{x}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$ wird erfüllt durch $\mathfrak{x}=P:Q$ und nur dadurch. Somit ist der Quotient

$$\frac{P:M}{Q:M}=P:Q. \tag{4}$$

Sind die Grössen A B einer- und die Grössen A' B' andererseits commensurabel und α α' die den Verhältnissen $A:B$ und $A':B'$ zugeordneten Zahlen, so entspricht der Summe $(A:B)+(A':B')$ die Summe $\alpha+\alpha'$, dem Producte $(A:B)(A':B')$ das Product $\alpha\alpha'$. Setzt man $A':B'=C:B$, so ist $(A:B)+(A':B')=(A+C):B$ und da $A=\alpha B$ $C=\alpha' B$ somit $A+C=(\alpha+\alpha')B$ ist, so entspricht dem Verhältnisse $(A+C):B$ die Zahl $\alpha+\alpha'$. Setzt man aber $A':B'=B:D$, so hat man $(A:B)\cdot(A':B')=A:D$. Daneben ist $B=\alpha' D$, somit $A=\alpha(\alpha' D)=(\alpha\alpha')D$ (Formel (ϑ) S. 104), also gehört zu $A:D$ die Zahl $\alpha\alpha'$. Demnach fallen die Rechnungen mit den Verhältnissen commensurabler Grössenpaare zusammen mit den entsprechenden Rechnungen an den diesen Verhältnissen zugeordneten Rationalzahlen.

10. Zufolge des Satzes in Nr. 6 kann man jedem Verhältnisse ein gleiches an die Seite stellen, dessen Hinterglied eine gegebene Grösse E des betrachteten stetigen Systems ist. Die in Nr. 8 eingeführten Zahlen werden demnach sämmtlich durch die Verhältnisse $A:E$ dargestellt, wobei A irgend eine Grösse des Systems sein soll. Der Grösse E selbst entspricht die Zahl 1. Denkt man sich die „Grösseneinheit“ E ein für alle Male festgesetzt, so versteht man unter A selbst schon die zu dieser Grösse gehörige Zahl $A:E$; insbesondere ist $E=1$. Aus dieser Darstellung der Verhältnisszahlen erkennt man ohne Weiteres, dass sie ein stetiges System bilden. Denn einer jeden Lücke in ihrem Systeme würde eine im Grössensystem A, B, $C\cdots$ entsprechen. Eine solche Lücke giebt es aber nicht, da dieses Grössensystem eben stetig sein soll.

Zu dem System der Verhältnisszahlen gehören die absoluten rationalen Zahlen. Ob auch die darin vorhandenen irrationalen Zahlen mit den irrationalen Zahlen, welche die Arithmetik aufstellt, zusammenfallen, kann jedenfalls erst dann entschieden werden, wenn die letzteren

in die Arithmetik eingeführt sind, was im nächsten Abschnitte geschehen soll. Dort, in Nr. 18, wird man den Nachweis finden, dass die positiven und negativen (s. u.) irrationalen Verhältnisszahlen mit den nach dem Vorgange von G. Cantor erklärten irrationalen Zahlen der Arithmetik identisch sind.[1])

11. Die Verhältnisse der stetigen relativen Grössen. — Die vorstehende Theorie lässt sich unschwer auf die relativen Grössen in engerm Sinne übertragen. Wir beschränken uns indess auf die Betrachtung eines einzigen Systems von solchen Grössen, nämlich der relativen Strecken auf einer Geraden XX'. Solche Strecken werden im Folgenden mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \cdots$ bezeichnet.

Unter den Verhältnissen $\mathfrak{A} : \mathfrak{B}$, worin das Hinterglied von Null verschieden ist, unterscheiden wir drei Arten: die erste, wenn die beiden Strecken gleichbezeichnet sind, die zweite, wenn sie entgegengesetzte Vorzeichen haben, und die dritte, wenn das Vorderglied 0 ist. Gleich heissen nun die beiden Verhältnisse $\mathfrak{A} : \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}' : \mathfrak{B}'$ mit von 0 verschiedenen Hintergliedern, erstens wenn sie beide von der nämlichen Art sind und dabei die Verhältnisse der bezüglichen absoluten Strecken $|\mathfrak{A}| : |\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{A}'| : |\mathfrak{B}'|$ im Sinne von Nr. 2 einander gleich sind, und zweitens wenn sie beide der dritten Art angehören.

Wir bemerken zunächst, dass der Satz in Nr. 6 auch für die relativen Strecken gilt: „Zu einer von Null verschiedenen Strecke $\mathfrak{A}$ giebt es eine und nur eine Strecke $\mathfrak{X}$, so dass das Verhältniss $\mathfrak{X} : \mathfrak{A}$ gleich ist dem gegebenen Verhältnisse $\mathfrak{B} : \mathfrak{C}$, worin $\mathfrak{C}$ nicht Null ist.“ Wir brauchen nämlich, falls $\mathfrak{B}$ nicht 0 ist, nur die absolute Strecke X so zu construiren, dass $X : |\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}| : |\mathfrak{C}|$ ist, und dann $\mathfrak{X} = + X$ oder $- X$ zu nehmen, je nachdem das Verhältniss $\mathfrak{B} : \mathfrak{C}$ von der ersten oder zweiten Art ist. Falls $\mathfrak{B} = 0$ ist, muss $\mathfrak{X} = 0$ sein.

Betrachten wir jetzt die Verhältnisse von der Form $\mathfrak{A} : 0$. Falls $\mathfrak{A}$ nicht 0 ist, kann dieses Verhältniss zufolge der obigen Erklärung keinem gleichgesetzt werden, dessen Hinterglied nicht Null ist. Dann aber werden wir die Verhältnisse $\mathfrak{A} : 0$ überhaupt nicht zulassen, weil der gerade erwähnte Satz für sie nicht mehr gelten würde. Denn die Proportion $\mathfrak{X} : \mathfrak{B} = \mathfrak{A} : 0$ wäre unmöglich, mag man sich unter $\mathfrak{X}$ 0 oder irgend eine eigentliche Strecke vorstellen. Dagegen scheint es nahe zu liegen, das Verhältniss $0 : 0$ als den übrigen Verhältnissen $0 : \mathfrak{B}$ gleich anzusehen.

Ein jedes Verhältniss $\mathfrak{A} : \mathfrak{B}$ lässt sich demnach in ein solches verwandeln, dessen Hinterglied eine gegebene positive Strecke E ist.

1) Der Zusammenhang zwischen den obigen Verhältnisszahlen und den irrationalen Zahlen nach der Erklärung von Dedekind wird von O. Hölder hergestellt (vgl. Leipziger Berichte 1901 S. 19—32).

Von den zwei ungleichen Verhältnissen $\mathfrak{A} : \mathsf{E}$ und $\mathfrak{B} : \mathsf{E}$ möge das erstere grösser oder kleiner als das letztere heissen, je nachdem die Strecke $\mathfrak{A}$ grösser oder kleiner als $\mathfrak{B}$ ist.

Dieses vorausgesetzt, kann man die Summe zweier Verhältnisse von relativen Strecken genau auf die nämliche Weise erklären, wie in Nr. 9 die zweier Verhältnisse von absoluten Strecken. Es ist demnach z. B. wenn $A\,B\,C$ irgend welche Punkte der Geraden XX' bedeuten,

$$(AB:\mathsf{E}) + (BC:\mathsf{E}) = (AB + BC) : \mathsf{E} = AC : \mathsf{E}. \tag{a}$$

Lässt man die Punkte B und C zusammenfallen, so erkennt man hieraus, dass das Verhältniss $0 : \mathsf{E}$ der Modulus dieser Addition und somit mit 0 zu bezeichnen ist. Dass die gegenwärtige Addition die gewöhnliche algebraische ist, ergiebt sich durch sinngemässe Uebertragung der Sätze 1)—4) S. 60 und ihrer Beweise auf die neuen Verhältnisse. Die Subtraction ist nunmehr stets möglich und zwar nur in einer Weise. Denn nach der Formel (a) kann, was AB und AC auch für Strecken sein mögen, nur sein

$$(AC : \mathsf{E}) - (AB : \mathsf{E}) = BC : \mathsf{E}.$$

Endlich wird nunmehr

$$(-\mathfrak{A} : \mathfrak{B}) = 0 - (\mathfrak{A} : \mathfrak{B}) = -(\mathfrak{A} : \mathfrak{B})$$

gesetzt.

Auch die Productbildung in Nr. 9 können wir hier benutzen. Es sei also $(\mathfrak{A} : \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{B} : \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} : \mathfrak{C})$, welche Formel zunächst noch den besondern Fall $(0:0)\ (0:\mathfrak{C}) = 0:\mathfrak{C}$ enthält. Um das Product $(\mathfrak{A}':\mathfrak{B}') \cdot (\mathfrak{B}:\mathfrak{C})$, wobei $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ verschieden sein soll, zu bilden, bringe man das erste Verhältniss durch Auflösung der Proportion $\mathfrak{A}:\mathfrak{B} = \mathfrak{A}':\mathfrak{B}'$ nach $\mathfrak{A}$ auf die Form $\mathfrak{A}:\mathfrak{B}$. Die Grundregeln der Multiplication lassen sich aus dieser Erklärung des Products in ähnlicher Weise ableiten, wie in Nr. 9.

Die Division ist stets und zwar nur in einer Weise möglich, wenn der Divisor nicht Null ist. Dann haben wir

$$\mathfrak{A}:\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}:\mathfrak{C})/(\mathfrak{B}:\mathfrak{C}). \tag{b}$$

Da für jedes Verhältniss $\mathfrak{A}:\mathfrak{B}$

$$(0:\mathfrak{A}) \cdot (\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) = 0:\mathfrak{B} \quad \text{d. i.} \quad 0 \cdot (\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) = 0$$

ist, so bedeutet der Quotient $0/0$ jedes beliebige Verhältniss und ist daher zu verwerfen (S. 5). Damit verliert die Formel (b) ihre Giltigkeit im Falle dass $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = 0$ ist. Um diese Ausnahme zu beseitigen, lassen wir jetzt auch das Verhältniss $0:0$ fallen, so dass hinfort das Hinterglied eines jeden Streckenverhältnisses als von 0 verschieden anzusehen ist.

Die Verhältnisse der relativen Strecken lassen sich sämtlich auf

solche zurückführen, deren Hinterglied die gegebene positive Strecke E ist. Diejenigen Verhältnisse $\mathfrak{A} : E$, wo $\mathfrak{A}$ eine positive, zu E commensurabele Strecke ist, haben wir bereits mit den positiven rationalen Zahlen zusammenfallen lassen, desgleichen das Verhältniss $0 : E$ mit der Zahl 0. Ist die Strecke $\mathfrak{A}$ negativ und mit E commensurabel, so sei das Verhältniss $\mathfrak{A} : E$ die rationale Zahl $-|\mathfrak{A}| : E$. Diese Gleichstellung erscheint deshalb zulässig, weil das Rechnen mit den commensurabeln Verhältnissen völlig dem an den ihnen zugeordneten rationalen Zahlen entspricht, was mit Benützung von IV. 5 auf die nämliche Weise zu zeigen ist, wie es am Schlusse von Nr. 9 bezüglich der absoluten Verhältnisse gemacht ist. Sind die Strecken $|\mathfrak{A}|$ und E incommensurabel, so heisst das Verhältniss $\mathfrak{A} : E$ eine irrationale Zahl und zwar, je nachdem die Strecke $\mathfrak{A}$ positiv oder negativ ist, eine positive oder negative.

Uebungen zum VI. Abschnitt.

1) Man kann die Gleichheit zweier Verhältnisse oder Grössenpaare (A, B) (A', B') nicht in der Art erklären, dass man festsetzt, es soll dann $(A, B) = (A', B')$ sein, wenn $A + A' = B + B'$ ist. Warum? (Vgl. S. 2 Forderung 1).)

2) a) Die Gleichheit der geometrischen Verhältnisse zweier Streckenpaare AB, $A'B'$ lässt sich nach H. Grassmann (Ausdehnungslehre 1844 S. 75 f.) auf nachstehende Art erklären.[1]) „Auf zwei beliebigen in M sich schneidenden Geraden a, a' (Fig. VIII) trage man von M aus bezw. die Strecken A A' auf ($A = MP$ $A' = MP'$). Von einem zweiten Punkte N, der indess mit M zusammenfallen darf, ziehe man zu a, a' die Parallelen b, b' und trage darauf von N aus bezw. die Strecken BB' auf ($B = NQ$ $B' = NQ'$). Wenn die Gerade QQ' parallel zur Geraden PP' ist, so sollen die Verhältnisse $A : B$ und $A' : B'$ einander gleich heissen und zwar nur dann.

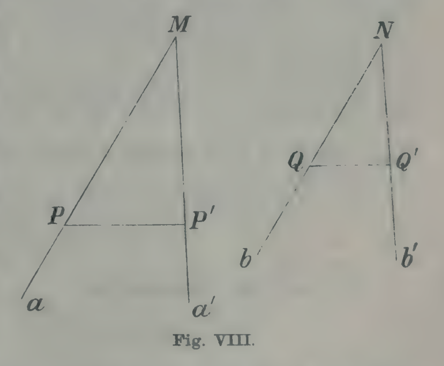


Fig. VIII.

Man zeige nun: 1) Bei dieser Erklärung kommt es nur auf die vier Strecken A B A' B' an, d. h. je nachdem die Geraden QQ' und PP' parallel sind oder nicht, ist auch die Verbindungslinie der Endpunkte der Strecken B B' parallel zu der der Endpunkte der Strecken A A' oder

1) Die auf diese Erklärung gegründete Lehre von den Verhältnissen ist vom Archimedischen Axiome für die Strecken unabhängig.

nicht, wenn eine von den Geraden $a\,a'$ durch eine andere ersetzt wird. 2) Wenn zufolge obiger Erklärung $A:B = A':B'$ und $A':B' = A'':B''$ ist, so ist nach ihr $A:B = A'':B''$. — Zum Beweise dieser Sätze dient der Satz: „Wenn in zwei Dreiecken zwei Paare von Seiten parallel sind und die Ecken paarweise auf drei Geraden liegen, welche in einem Punkte sich schneiden, so ist auch das dritte Seitenpaar parallel", welchen Grassmann a. a. O. auf ähnliche Art zeigt, wie G. v. Staudt (Geometrie der Lage 1847 S. 41) den allgemeinern über zwei perspectivisch liegende Dreiecke.

b) Daran schliesst sich die folgende Erklärung: „Das Verhältniss $A:B$ heisst kleiner oder grösser als $A':B'$, je nachdem die Gerade, welche von Q aus parallel zu PP' gezogen wird, den Halbstrahl b' in einem Punkte der Strecke NQ' durchsetzt oder nicht."

3) Man weise nach, dass aus der Grassmann'schen Erklärung der gleichen Streckenverhältnisse die Euclid'sche (S. 122) folgt.

Der Uebergang von der ersteren Erklärung zur letzteren gestattet aus der Proportion $A:B = A':B'$ die weitere $A:A' = B:B'$ abzuleiten (S. 127).[1]

4) Ableitung der Euclid'schen Erklärung des kleineren Verhältnisses (S. 124) aus der obigen Erklärung 2).

5) Den Satz vom Winkelschnitt: „Werden die Schenkel des Winkels XAX' durch zwei parallele Gerade bezw. in den Punkten BB', CC' geschnitten, so ist

$$AB : BC = A'B' : B'C'\text{"}$$

nach Euclid zu beweisen (vgl. Elem. VI. 2) und im Falle, dass eine von den genannten Geraden der Scheitelwinkel zu XAX' schneidet, auf die relativen Strecken zu übertragen.

Man beweise in der Manier von Nr. 4 die nachstehenden Sätze 6)—11).

6) Aus

$$A:B = B':C' \quad B:C = A':B' \tag{a}$$

folgt neben $A \gtreqless C$ entsprechend $A' \gtreqless C'$. (Eucl. V. 21.)

7) Aus den Proportionen (a) folgt die weitere

$$A:C = A':C'. \quad \text{(Eucl. V. 23.)}$$

8) Aus den Beziehungen

$$A:B \geqq B':C' \quad B:C \geqq A':B' \tag{b}$$

folgt bei höchstens einmaligem Vorkommen des Zeichens $=$, dass neben $A \leqq C$ $A' < C'$ ist.

9) Aus den Beziehungen (b) ergiebt sich die Ungleichung

$$A:C > A':C'.$$

---

1) K. Kupffer (Sitzungsb. d. Dorpater Naturforscher-Ges. X. B. S. 381) bringt dies auf geometrischen Wege zu stande.

10) Aus den Ungleichungen

$$A:M > A':M' \quad B:M > B':M'$$

ergiebt sich die weitere

$$(A+B):M > (A'+B'):M'.$$

11) Wenn

$$A:M \geqq A':M' \quad B:M \leqq B':M'$$

ist, jedoch das Zeichen $=$ höchstens einmal vorkommt, so ist im Falle dass $A < B$ ist, auch $A' < B'$ und es besteht die Ungleichung

$$(B-A):M < (B'-A'):M'.$$

12) Man schreibe die sieben Proportionen an, welche sich nach S. 128 aus der vier gleichartige Grössen enthaltenden Proportion $A:B = A':B'$ ergeben.

13) Man zeige, dass die von Descartes aufgestellte Multiplication der Strecken (vgl. S. 130) distributiv, associativ und commutativ ist.

14) Bezeichnet die Strecke X das Product der Strecken $A\,B$ bei der Einheit E nach Descartes, X' das der nämlichen Strecken bei der Einheit E', so besteht die Proportion $X:X' = \mathsf{E}':\mathsf{E}$ (zufolge des obigen Satzes 7)). Ist die Strecke Y der Quotient der Strecke A durch B bei der Einheit E, Y' der der nämlichen Strecke bei der Einheit E', so hat man $Y:Y' = \mathsf{E}:\mathsf{E}'$ (Nr. 4 Satz 10)).

15) Aus der Proportion von vier Strecken $A:B = A':B'$ folgt, dass die Descartes'schen Producte $A \cdot B'$ und $B \cdot A'$ einander gleich sind (auch nach obigem Satze 7)). — Desgleichen ist im Sinne von Nr. 9 $(A:\mathsf{E}) \cdot (B':\mathsf{E}) = (A':\mathsf{E}):(B:\mathsf{E})$.

16) Um die Formel (3) auf S. 132 zu beweisen, bedarf man, falls $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die in (2) angegebenen Werthe behalten, des Satzes: Setzt man das Verhältniss $\mathfrak{c} = K:P = L:Q = S:(P+Q)$, so ist $S = K + L$.

17) Man übertrage, soweit es möglich ist, die Sätze über die Verhältnisse und Proportionen in Nr. 4 und 5 auf die relativen Strecken und führe diejenigen Betrachtungen, welche in Nr. 11 bloss angedeutet sind, vollständig durch.

VII. Abschnitt.

Arithmetische Theorie der irrationalen Zahlen nach G. Cantor und Ch. Méray. Die reellen Zahlen.

1. Wir haben VI. 8 der Einführung der irrationalen Zahlen vermittelst eines stetigen Grössensystemes gedacht. In neuerer Zeit hat man es vorgezogen, diese Theorie auf arithmetischem Boden zu entwickeln, wozu das im 3. Abschnitte auseinandergesetzte Verfahren der Begriffsbildung vollkommen ausreicht. Dabei kann man in verschiedener Weise zu Werke gehen. Bisher sind solche Theorien der irrationalen Zahlen von K. Weierstrass[1]), G. Cantor und Ch. Méray[2]), R. Dedekind (s. S. 117 Note 1) aufgestellt worden. Diesen Bemühungen gegenüber erhob L. Kronecker die Forderung, dass bei der Begründung der Arithmetik bloss die vier Rechnungsarten und zwar jede nur eine endliche Anzahl Male verwendet werden sollen. Da ihr keine der genannten Theorien der irrationalen Zahlen entspricht, so wollte er diese Zahlen aus der Analysis verbannen.[3]) Die Kronecker'sche Forderung fand jedoch nur wenig Zustimmung; die meisten Mathematiker bleiben dabei, dass der logische Grundsatz des Widerspruchs auch in der Arithmetik verwendbar sei (vgl. S. 148).

Von den erwähnten Theorien scheint uns die Cantor-Méray'sche am leichtesten durchführbar zu sein. Sie lässt sich ungezwungen an die Lehre von den systematischen Brüchen anknüpfen.

---

1) Vgl. Abschn. IX, Uebung 1).

2) G. Cantor, Math. Ann. V. S. 123, XXI S. 564. E. Heine, Borchardt Journ. 84. S. 172. — Ch. Méray, Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale 1872 Nr. 4 f., Leçons nouv. d'Analyse inf. 1894—97 I. p. 23 f. — H. Burkhardt (Vierteljahrschr. d. nat. Ges. Zürich 46 B. S. 179) vergleicht die drei Theorien hinsichtlich der Berechnung einer Irrationalzahl.

3) Vgl. Journal f. r. u. ang. Mathematik Bd. 99 S. 336, Bd. 101 S. 339, 345 in der Abhandlung „über den Zahlbegriff". Daselbst werden auch die negativen und gebrochenen Zahlen aus der Arithmetik ausgeschieden, sodass ihr nur die natürlichen Zahlen verbleiben. So geistreich der Versuch, die gebrochenen Zahlen durch Congruenzen zu ersetzen, auch sein mag, durch Einfachheit zeichnet er sich gerade nicht aus.

Nachdem man festgestellt hat, dass die S. 90 eingeführten systematischen Brüche S_n bei ins Unbegrenzte ausgedehntem n dem Convergenzprincip genügen (vgl. IV. 6 und VII. 4), scheint es am nächsten zu liegen, auszugehen vom Systeme aller systematischen Brüche zu einer bestimmten Grundzahl $e \geqq 2$, der endlichen, sowie der unendlichen, von den letzteren jedoch diejenigen, deren Stellen von einer bestimmten an sämmtlich $e-1$ sind, ausgeschlossen. Jedem nicht-periodischen unendlichen systematischen Bruch wird ein neues Ding, eine irrationale Zahl zugeordnet. Gleich sind zwei irrationale Zahlen, wenn an je zwei Stellen derselben von der nämlichen Ordnung die gleichen Ziffern stehen und grösser unter zwei ungleichen reellen Zahlen heisst jene, in welcher die erste von der entsprechenden Ziffer der anderen verschiedene grösser ist. Die Summe zweier reeller Zahlen

$$\mathfrak{a} = a_0 + \frac{a_1}{e} + \cdots + \frac{a_n}{e^n} + \cdots \quad \mathfrak{b} = b_0 + \frac{b_1}{e} + \cdots + \frac{b_n}{e^n} + \cdots$$

wird folgendermassen erklärt: „Ist für alle Werthe von n von einem bestimmten, m, an $a_n + b_n = e - 1$, so sei $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ der rationale Bruch

$$a_0 + b_0 + \frac{a_1 + b_1}{e} + \cdots + \frac{a_{m-1} + b_{m-1}}{e^{m-1}} + \frac{a_m + b_m + 1}{e^m}.$$

Giebt es aber zu jeder Zahl m Werthe von n grösser als m, wofür $a_n + b_n$ von $e-1$ verschieden ist, so sei

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} + \cdots,$$

wobei die Ganzen c_0 und die Ziffern $c_1, c_2 \cdots$ auf nachstehende Weise zu bestimmen sind. Ist $a_n + b_n < e - 1$, so ist der Theilzähler c_n entweder $a_n + b_n$ oder $a_n + b_n + 1$, je nachdem die erste von den Summen $a_{n+1} + b_{n+1}$, $a_{n+2} + b_{n+2} \cdots$, welche von $e-1$ verschieden ist, kleiner oder grösser als $e-1$ ist. Ist $a_n + b_n = e - 1$, so ist c_n unter denselben Bedingungen entweder $e-1$ oder Null. Ist aber $a_n + b_n \geqq e$, so ist c_n wieder unter den nämlichen Bedingungen entweder $a_n + b_n - e$ oder $a_n + b_n + 1 - e$."

Noch viel umständlicher würde die Erklärung des Productes zweier reeller Zahlen ausfallen. Man zieht es daher vor, vor der Aufstellung der vier Rechnungsarten zur Cantor'schen oder Weierstrass'schen Theorie der irrationalen Zahlen überzugehen.

Auf die in Rede stehende Art, welche zuerst von P. du Bois-Reymond (allg. Functionentheorie I. S. 55) empfohlen wurde, werden die irrationalen Zahlen eingeführt von O. Reichel (Grundlagen der Arithmetik II. T. 1890), von F. Hocevar (Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 1901), von E. Czuber (Zeitschrift f. d. Realschulwesen XXV. Jgg. S. 193 f.).

2. Der rationale Grenzwerth einer Function bei $\lim n = +\infty$. — Wir betrachten nunmehr einen mittelst der vier Rechnungsarten (jede in einer endlichen Anzahl von Malen verwendet) aus gegebenen

rationalen Zahlen und dem Buchstaben n, welcher jede ganze Zahl von einer bestimmten an bedeuten kann, gebildeten Ausdruck. Er hat demnach für jedes solche n einen rationalen Werth. Den Buchstaben n nennt man, weil er unbegrenzt viele Werthe annehmen darf, eine Veränderliche und jenen Ausdruck eine eindeutige Function von ihr.[1]) Die Function, wofür wir hier schematisch φ_n oder $\varphi(n)$ schreiben werden, kann in n rational sein oder nicht d. h. es kommt n in den darin auftretenden Monomen entweder nur als Factor oder auch als Exponent vor. Von der letzteren Art ist z. B. der auf S. 90 eingeführte systematische Bruch

$$S_n = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n}. \tag{a}$$

Dass die Begriffe der Veränderlichen und der Function später (s. Nr. 12 und VIII. 8) Erweiterungen erfahren werden, braucht uns bis dahin nicht zu kümmern.

Wir haben im Falle, dass der Bruch S_n bei unbegrenzt wachsendem n periodisch wird, bereits den Grenzwerth desselben eingeführt (IV. 10). Diesen Begriff wollen wir zunächst auf eine beliebige Function von n, φ_n, ausdehnen.

Giebt es eine rationale Zahl α[2]) von der Beschaffenheit, dass jeder positiven rationalen Zahl ε eine positive rationale Zahl μ so zugeordnet werden kann, dass stets

$$|\alpha - \varphi_n| < \varepsilon \quad [\text{d. i. } -\varepsilon < \alpha - \varphi_n < \varepsilon], \tag{b}$$

wenn nur $n > \mu$ ist[3]), so heisst α der Grenzwerth (limes oder limite) der Function φ_n bei ins Unendliche wachsendem n; wofür die abgekürzte Schreibweise gebraucht wird:

$$\alpha = \lim_{n=+\infty} \varphi_n.$$

Man sagt auch: φ_n convergirt bei $\lim n = +\infty$ zum Grenzwerth α. Von entscheidender Wichtigkeit hierbei ist die wirkliche Herstellung der Zahl μ, die, wenn nicht für jeden Werth von n $\varphi_n = \alpha$ ist, von ε abhängen muss. Bevor sie nicht geleistet ist, darf von einem Grenzwerthe der Function φ_n nicht gesprochen werden. Dabei darf man von vorneherein annehmen, dass ε in (b) unter einer bestimmten, übrigens beliebigen positiven Zahl liege. — Ist insbesondere

1) Ch. Méray (Leç. nouv. etc. I. p. 23) bezeichnet einen solchen Ausdruck als „variant".

2) Ein für alle Male sei bemerkt, dass im Folgenden griechische Buchstaben, so namentlich φ_n, stets rationale Zahlen bedeuten.

3) Bei dieser Erklärung des Grenzwerthes α ist vorausgesetzt, dass auch der Null ein absoluter Betrag, nämlich 0, beigelegt sei (vgl. III. 13). Es kann also für gewisse, ja selbst für alle Werthe von n φ_n gleich α sein.

$\alpha = 0$, so muss zu jeder positiven Zahl ε eine ebensolche μ gehören von der Eigenschaft, dass stets $|\varphi_n| < \varepsilon$, wenn nur $n > \mu$ ist.

Wenn die Zahlen $\varphi_0, \varphi_1 \cdots$ von einem hinlänglich grossen Werthe von n an sämmtlich grösser sind, als die beliebig vorgegebene positive rationale Zahl γ, so sagt man, die Zahlen φ_n wachsen zugleich mit n ins Unendliche oder φ_n hat bei ins Unendliche wachsendem n den Grenzwerth „plus unendlich". Dies giebt in Kürze die Formel

$$\lim_{n=+\infty} \varphi_n = +\infty$$

an. Sie besagt also, dass zu jeder positiven rationalen Zahl γ eine ebensolche Zahl μ von der Eigenschaft gehört, dass stets $\varphi_n > \gamma$, wenn nur $n > \mu$ ist. Endlich bedeutet die Formel

$$\lim_{n=+\infty} \varphi_n = -\infty,$$

dass bei unbegrenzt wachsendem n die Zahlen φ_n ins Unendliche abnehmen oder φ_n den Grenzwerth „minus unendlich" hat, d. i. den Umstand, dass zu jeder negativen rationalen Zahl $-\gamma$ eine positive rationale Zahl μ gehört von der Eigenschaft, dass stets $\varphi_n < -\gamma$, wenn nur $n > \mu$ ist.

Man merke sich, dass beständiges Wachsen einer Function φ_n bei best ndig zunehmenden n nicht nothwendig das Wachsen derselben ins Unendliche mit sich bringt. So wachsen die Brüche $1/2$, $2/3$, $\cdots \frac{n-1}{n} \left(= 1 - \frac{1}{n}\right) \cdots$ zugleich mit n beständig, ohne jemals die Zahl 1 zu erreichen.

3. Allgemeine Sätze über die Grenzwerthe der Functionen von n, zunächst freilich nur für die rationalen Grenzwerthe auszusprechen. Vgl. jedoch Nr. 14.

1. Satz. „Wenn die Function φ_n bei $\lim n = +\infty$ den rationalen Grenzwerth α besitzt, so haben die Functionen $\gamma \pm \varphi_n$, $\gamma\varphi_n$ (worin γ eine gegebene, von 0 verschiedene rationale Zahl bezeichnet) bei $\lim n = +\infty$ bezw. die Grenzwerthe $\gamma \pm \alpha$, $\gamma\alpha$. Ist α nicht 0, so hat die Function $1 : \varphi_n$ bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth $1 : \alpha$. Wenn aber $\alpha = 0$ ist und die Werthe von φ_n für jedes n von einem bestimmten an von Null verschieden und dabei gleichbezeichnet sind, so hat $1 : \varphi_n$ bèi $\lim = +\infty$ den Grenzwerth $\pm\infty$. — Wenn φ_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth $\pm\infty$ hat, so hat $1 : \varphi_n$ dabei den Grenzwerth Null."

Diese Behauptungen sind leicht als richtig zu erweisen. Aus der Formel

$$(\gamma \pm \alpha) - (\gamma \pm \varphi_n) = \pm(\alpha - \varphi_n)$$

ergiebt sich zufolge der Ungleichung (b), dass wenn nur $n > \mu$ ist,

$$|(\gamma \pm \alpha) - (\gamma \pm \varphi_n)| < \varepsilon$$

ist. Das Nämliche besagt aber die Formel

$$\lim_{n=+\infty}(\gamma \pm \varphi_n) = \gamma \pm \alpha.$$

Betrachtet man ferner den Unterschied

$$\gamma\alpha - \gamma\varphi_n = \gamma(\alpha - \varphi_n),$$

so hat man aus demselben Grunde, wenn nur $n > \mu$ ist,

$$|\gamma\alpha - \gamma\varphi_n| < |\gamma|\varepsilon.$$

Da bei der Willkürlichkeit von ε auch $|\gamma|\varepsilon$ jede vorgegebene rationale Zahl ε' sein kann, so gelangen wir hiermit zur Formel

$$\lim_{n=+\infty}\gamma\varphi_n = \gamma\alpha.$$

Endlich ist

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\varphi_n} = \frac{\varphi_n - \alpha}{\alpha\varphi_n}.$$

Nun ist zufolge (b) neben $n > \mu$

$$|\alpha| - |\varphi_n| \leqq |\alpha - \varphi_n| < \varepsilon, \quad \text{also} \quad |\alpha| - \varepsilon < |\varphi_n|.$$

Wir finden demnach, dass wenn $n > \mu$ ist,

$$\left|\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\varphi_n}\right| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|(|\alpha| - \varepsilon)}$$

ist, somit, da die rechte Seite jede positive Zahl ε' sein kann, die Formel

$$\lim_{n=+\infty}\frac{1}{\varphi_n} = \frac{1}{\alpha}.$$

Ist aber $\alpha = 0$ und ist dabei φ_n für jedes $n > m$ z. B. positiv, so muss jedem $\varepsilon > 0$ ein $\mu > 0$ so entsprechen, dass wenn nur $n > \mu$ ist, $0 < \varphi_n < \varepsilon$ ist. Unter derselben Bedingung ist demnach $1 : \varphi_n > 1 : \varepsilon$. $1 : \varepsilon$ kann jede noch so grosse positive Zahl sein; wir erhalten somit die Formel

$$\lim_{n=+\infty}\frac{1}{\varphi_n} = +\infty.$$

2. Satz. „Hat auch die Function ψ_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen rationalen Grenzwerth β, so gelten die Formeln

$$\lim_{n=+\infty}(\varphi_n \pm \psi_n) = \alpha \pm \beta \qquad \lim_{n=+\infty}\varphi_n\psi_n = \alpha\beta. \tag{c}$$

Die Function $\psi_n : \varphi_n$ hat bei $\lim n = +\infty$, wenn α nicht Null ist, den Grenzwerth $\beta : \alpha$, wenn dagegen $\alpha = 0$ und β nicht 0 ist, dabei jedoch φ_n von einem bestimmten Werthe des Stellenzeigers an das nämliche Vorzeichen besitzt, den Grenzwerth $+\infty$ oder $-\infty$. — Hat φ_n den Grenzwerth $\pm\infty$, ψ_n den von Null verschiedenen Grenzwerth β, so hat $\psi_n : \varphi_n$ den Grenzwerth 0.“

Die Richtigkeit dieser Behauptungen erhellt unmittelbar aus der Beziehung (b) und der entsprechenden für die Function ψ_n, welche wir in der Form ansetzen dürfen, dass, unter μ die in (b) vorkommende Zahl verstanden[1]), neben $n > \mu$ stets

$$|\beta - \psi_n| < \varepsilon \tag{c*}$$

sein soll. Nun hat man nur die Unterschiede zu betrachten:

$$(\alpha \pm \beta) - (\varphi_n \pm \psi_n) = (\alpha - \varphi_n) \pm (\beta - \psi_n),$$
$$\alpha\beta - \varphi_n\psi_n = \alpha\beta - \{\alpha - (\alpha - \varphi_n)\} \ \{\beta - (\beta - \psi_n)\}$$
$$= \beta(\alpha - \varphi_n) + \alpha(\beta - \psi_n) - (\alpha - \varphi_n)(\beta - \psi_n).$$

Demnach findet man aus den Ungleichungen (b) und (c*), dass neben

$$n > \mu \quad |(\alpha \pm \beta) - (\varphi_n \pm \psi_n)| < 2\varepsilon$$

und, ε kleiner als 1 vorausgesetzt,

$$|\alpha\beta - \varphi_n\psi_n| < \{|\alpha| + |\beta| + \varepsilon\}\,\varepsilon < \{|\alpha| + |\beta| + 1\}\,\varepsilon$$

ist. In diesen Beziehungen liegen, da nicht allein 2ε, sondern auch $\{|\alpha| + |\beta| + 1\}\,\varepsilon$ jede beliebige rationale Zahl sein kann, die beiden Formeln (c). Aus der zweiten von ihnen ergiebt sich, indem man den Quotienten

$$\frac{\psi_n}{\varphi_n} = \frac{1}{\varphi_n} \cdot \psi_n$$

setzt, der erste Satz über ihn. Der zweite darüber ist, falls z. B. $\varphi_n > 0 \ \ \beta > 0$ ist, daraus zu entnehmen, dass nunmehr zufolge der Beziehungen (b) und (c*) neben $n > \mu$

$$\frac{\psi_n}{\varphi_n} > \frac{\beta - \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\beta}{\varepsilon} - 1$$

ist. Hier kann $\beta : \varepsilon - 1$ jede noch so grosse positive Zahl sein.

Corollare. 3. „Hat die Function φ_n bei $\lim n = +\infty$ den rationalen Grenzwerth α und ist eine zweite Function ψ_n so beschaffen, dass

$$\lim_{n=+\infty} (\psi_n - \varphi_n) = 0$$

ist, so hat sie bei $\lim n = \infty$ ebenfalls den Grenzwerth α." — Dies folgt unmittelbar aus der Identität

$$\psi_n = \varphi_n - (\varphi_n - \psi_n)$$

durch den Grenzübergang $\lim n = +\infty$.

4. „Ist eine bestimmte (d. h. von n unabhängige) Anzahl von Functionen von n

$$\varphi_n, \ \psi_n, \ \chi_n \cdots \omega_n$$

1) Wollte man nämlich zunächst auch annehmen, dass die Ungleichung (c*) nur dann besteht, wenn $n < \nu$ ist, so könnte man doch die beiden Zahlen μ, ν durch jede Zahl ersetzen, welche weder kleiner als μ, noch als ν ist.

vorgelegt, deren jede bei $\lim n = +\infty$ einen rationalen Grenzwerth besitzt, so hat die Summe $\varphi_n + \psi_n + \chi_n + \cdots + \omega_n$ bei $\lim n = +\infty$ zum Grenzwerth die Summe, das Product $\varphi_n \cdot \psi_n \cdot \chi_n \cdots \omega_n$ zum Grenzwerth das Product der Grenzwerthe der einzelnen Functionen."

5. Satz. a) „Ist der Grenzwerth $\alpha = \lim\limits_{n=+\infty} \varphi_n$ grösser (kleiner) als eine gegebene rationale Zahl β, so giebt es zwei positive Zahlen ϱ, μ, welche einander in der Art entsprechen, dass für jeden Werth

$$n > \mu \quad \varphi_n - \beta > \varrho \quad (< -\varrho)$$

ist."

b) „Ist ferner $\beta = \lim\limits_{n=+\infty} \psi_n$ und α grösser (kleiner) als β, so giebt es zwei positive Zahlen ϱ, μ, welche einander in der Art entsprechen, dass für jeden Werth

$$n > \mu \quad \varphi_n - \psi_n > \varrho \quad (< -\varrho)$$

ist.

Diese Sätze ergeben sich unmittelbar aus dem Begriffe des rationalen Grenzwerthes. Es genügt, den Beweis für einen der darin erwähnten Fälle durchzuführen. Ist z. B.

$$\lim_{n=+\infty} \varphi_n = \alpha \quad \lim_{n=+\infty} \psi_n = \beta \quad \text{und} \quad \alpha > \beta,$$

so hat man nach den Beziehungen (b) und (c*), wenn nur $n > \mu$ ist, $\varphi_n > \alpha - \varepsilon$ und $\psi_n < \beta + \varepsilon$, somit

$$\varphi_n - \psi_n > (\alpha - \beta) - 2\varepsilon.$$

Da $\alpha - \beta > 0$ und ε jede positive rationale Zahl sein darf, so braucht man sich nur $\varepsilon < (\alpha - \beta) : 2$ zu denken, um auf der rechten Seite der letzten Ungleichung eine positive Zahl ϱ zu erhalten.

Die beiden Sätze a) und b) lassen sich nach I. 10 umkehren, wenn man nur annimmt, dass die Functionen φ_n, ψ_n bei $\lim n = +\infty$ rationale Grenzwerthe besitzen. Weiss man aber bloss, dass bei $n > \mu$ $\varphi_n > \beta$ ist, so kann man nur schliessen, dass $\lim \varphi_n \geqq \beta$ ist. Desgleichen ergiebt sich aus der für alle Werthe von n grösser als μ geltenden Ungleichung $\varphi_n > \psi_n$ bloss, dass $\lim \varphi_n \geqq \lim \psi_n$ ist. (Vgl. 2. und 3. Satz auf S. 152.)

4. Legt man sich eine beliebige Function von n, φ_n, vor, so liegt die Frage nahe, ob sie einen rationalen Grenzwerth besitzt. Eine Bedingung, welcher die Zahlen φ_n dann nothwendig zu genügen haben, ergiebt sich unmittelbar aus (b). Es ist nämlich auch

$$|\alpha - \varphi_{n+r}| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2 \cdots),$$

so dass man schliessen muss

$$|\varphi_{n+r} - \varphi_n| < 2\varepsilon,$$

wenn nur $n > \mu$ ist. Indem auch 2ε jede positive Zahl bedeuten kann, so gelangen wir hierdurch zu folgender nothwendigen Bedingung: Soll die Function φ_n einen rationalen Grenzwerth α besitzen, so muss zu jeder positiven Zahl ε eine ebensolche Zahl μ gehören von der Eigenschaft, dass

$$|\varphi_{n+r} - \varphi_n| < \varepsilon, \tag{d}$$

wenn nur $n > \mu$ ist, gleichviel welchen der ganzzahligen Werthe 1, 2, $\cdots$ die Veränderliche r auch annehmen mag.

Allein diese Bedingung ist nicht hinreichend. Man kann leicht zeigen, dass sie an der Function φ_n erfüllt sein kann, ohne dass ein rationaler Grenzwerth vorhanden ist. Die Relation (d) besteht immer, wenn wir

$$\varphi_n = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e_2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} = S_n$$

setzen, wobei wir unter c_0 eine ganze Zahl, unter $c_1, c_2 \cdots c_n \cdots$ eine unbegrenzte Reihe von Ziffern (d. i. $0 \leqq c_n \leqq e-1$) verstehen, von denen man beliebig viele berechnen kann. In der That ist nun (vgl. IV. 6)

$$0 \leqq S_{n+r} - S_n \leqq \frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{n+r}} < \frac{1}{e^n}, \tag{e}$$

so dass für μ der schon in IV. 10 benutzte Werth $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon(e-1)}$ gesetzt werden kann.

Wird die endlose Reihe $c_1 \cdots c_n \cdots$ schliesslich periodisch, so ist, wie wir bereits wissen, ein rationaler Grenzwerth für S_n vorhanden. Wir zeigen nun, dass umgekehrt, wenn ein rationaler Grenzwerth α für S_n existieren soll, die Reihe $c_1 \cdots c_n \cdots$ schliesslich periodisch werden muss. Dabei können wir von der Annahme, dass die Ziffern $c_1, c_2 \cdots$ von einer bestimmten an entweder alle 0 oder alle $e-1$ sind, natürlich absehen. Es soll mithin zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\mu > 0$ gehören von der Eigenschaft, dass $|\alpha - S_n| < \varepsilon$ ist für alle $n > \mu$. Wir bemerken zunächst nach (e), dass für jeden der Werthe $n = 0, 1, 2 \cdots$ und $r = 1, 2 \cdots$

$$S_{n+r} \geqq S_n \qquad S_{n+r} + \frac{1}{e^{n+r}} \leqq S_n + \frac{1}{e^n}.$$

S_n nimmt also zugleich mit n beständig zu. Daraus folgt hier, dass ein jedes S_n kleiner als α ist. In der That kann für keinen Werth von n $S_n \geqq \alpha$ sein. Wäre nämlich für einen bestimmten Werth m von n $S_m \geqq \alpha$, so gehe man in der Reihe $c_{m+1}, c_{m+2} \cdots$ bis zur nächsten von Null verschiedenen Ziffer c_{m+k} $(k \geqq 1)$. Dann haben wir $S_{m+k} > S_m$. Nun ist für $r \geqq k$ $S_{m+r} \geqq S_{m+k}$, also wäre

$$S_{m+r} - \alpha \geqq S_{m+k} - \alpha \geqq S_{m+k} - S_m.$$

Es wäre mithin $S_{m+r} - \alpha$ für jedes $r \geqq k$ nicht unter der Zahl

$S_{m+k} - S_m$ gelegen, während es zufolge der Voraussetzung doch bei hinlänglich grossem r unter derselben liegen soll.

Auf ähnliche Weise schliesst man, dass wenn die Ziffern $c_1, c_2 \cdots$ nicht von einer bestimmten an alle gleich $e-1$ sind, dann

$$\alpha < S_n + \frac{1}{e^n} \quad (n = 0, 1, 2 \cdots)$$

sein muss.

Soll aber zu einer rationalen Zahl α eine Folge von Ziffern $c_1, c_2 \cdots c_n \cdots$ gefunden werden, derart, dass wie gross n auch sein mag, die Relation

$$S_n < \alpha < S_n + \frac{1}{e^n}$$

bestehe, so muss die Folge schliesslich periodisch werden (IV. 8).

Daraus folgt, dass falls die Ziffern $c_1, c_2 \cdots c_n \cdots$ sich nicht von einem bestimmten Gliede an periodisch wiederholen, S_n keinen rationalen Grenzwerth haben kann. Es ist leicht, solche Gesetze für die Entwickelung der aufeinanderfolgenden Stellen $c_1, c_2 \cdots$ vorzuschreiben, dass diese Folge nicht periodisch sein kann. Man nehme z. B.

$$\varphi_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \cdots + \frac{1}{10^{\frac{n(n+1)}{2}}} \quad (n = 1, 2 \cdots),$$

welche Function den Decimalbruch 0,1010010001 $\cdots$ liefert.

5. Convergente Functionen von n, das Convergenzprincip. — Die soeben gemachte Bemerkung veranlasst uns, die Eigenschaften einer Folge von rationalen Zahlen $\varphi_0, \varphi_1 \cdots \varphi_n \cdots$, welche von einer unbegrenzt wachsenden ganzen Zahl n abhängen und zunächst bloss der folgenden Forderung genügen, näher zu untersuchen. Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehöre eine positive Zahl μ von der Eigenschaft, dass

$$|\varphi_{n+r} - \varphi_n| < \varepsilon, \text{ wenn nur } n > \mu \text{ ist,} \tag{f}$$

was immer für eine ganze positive Zahl r auch sein mag. Unter r hat man sich demnach nicht etwa bloss jede bestimmte, sondern auch jede von n abhängige natürliche Zahl z. B. $r = n, 2n, n^2$ vorzustellen. — Eine solche Function von n soll convergent, die zusammengehörigen Ungleichungen (f) die Convergenzbedingung oder das Convergenzprincip heissen.[1])

1) G. Cantor (Math. Ann. 21. Bd. S. 567) nennt eine dem Convergenzprincipe unterworfene Reihe $\varphi_0, \varphi_1 \cdots \varphi_n \cdots$ eine Fundamentalreihe, J. Thomae (Elem. Theor. d. analyt. Functionen § 5) eine reguläre Reihe, J. Tannery (Introduction à la théorie des fonctions d'une variable p. 25) suite convergente. Convergente Function nach E. Catalan Théor. élém. des séries 1860 p. 16.

Anstatt der einen Reihe, deren Glieder das Convergenzprincip befriedigen,

Unter der Voraussetzung, dass die Function φ_n von n convergent ist, bestehen die folgenden beiden Sätze.

1. Satz. Jede convergente Function φ_n ist endlich, d. h. es giebt zwei bestimmte Zahlen, zwischen welchen ein jeder der Werthe $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \cdots$ liegt. — Verstehen wir nämlich unter m eine ganze Zahl grösser als μ, so hat man nach (f)

$$\varphi_m - \varepsilon < \varphi_{m+r} < \varphi_m + \varepsilon \qquad (r = 1, 2, 3 \cdots). \tag{g}$$

Es ist demnach kein Werth φ_n $(n = 0, 1 \cdots)$ grösser als die grösste von den Zahlen $\varphi_0, \varphi_1 \cdots \varphi_m, \varphi_m + \varepsilon$ und keiner kleiner als die kleinste von den Zahlen $\varphi_0, \varphi_1 \cdots \varphi_m, \varphi_m - \varepsilon$.

2. Satz. „Es muss einer der folgenden drei Fälle eintreten:

1) Zu jeder rationalen Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine solche Zahl $\mu > 0$, dass

$$|\varphi_n| < \varepsilon, \text{ wenn nur } n > \mu \text{ ist;}$$

es hat also die Function φ_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0.[1]) Oder

2)[2]) Es existiren zwei positive rationale Zahlen ϱ und μ derart, dass $\varphi_n > \varrho$ ist, wenn nur n über der Zahl μ liegt. Oder

3) Es existiren zwei positive rationale Zahlen ϱ, μ derart, dass $\varphi_n < -\varrho$ ist, wenn nur n über der Zahl μ liegt."

Wir gehen wieder von den Beziehungen (g) aus, wobei wir uns unter ε eine gegebene positive rationale Zahl und unter m eine ganze Zahl grösser als μ vorstellen. Findet sich nun, dass $\varphi_m > \varepsilon$ oder dass $\varphi_m < -\varepsilon$, so ist schon ersichtlich, dass die Zahlen φ_n die im zweiten oder dritten Falle ausgesprochene Eigenschaft besitzen. Es ist ja z. B. im ersten $\varphi_n > \varphi_m - \varepsilon > 0$, wenn nur $n > m$ ist. Wenn aber φ_m entweder einer der Zahlen ε und $-\varepsilon$ gleich ist oder zwischen $-\varepsilon$ und ε liegt, so bleibt die Frage noch unentschieden. Dann setze man für ε nacheinander positive Zahlen $\varepsilon', \varepsilon'' \cdots \varepsilon^{(p)} \cdots$,

---

benutzt P. Bachmann (Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen 1892 S. 7) zwei gegen einander convergirende Zahlenreihen

$$a_1, a_2, a_3 \cdots a_n \cdots \qquad b_1, b_2, b_3 \cdots b_n \cdots,$$

von denen die erste ansteigt, die zweite absteigt d. h. zwei Reihen, deren Glieder die Bedingungen erfüllen, dass für jeden Werth des Index n

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$$

ist und die Differenz $b_n - a_n$ mit wachsendem n zum Grenzwerth Null convergirt. Da mithin $0 < a_{n+r} - a_n < b_n - a_n$ und $0 < b_n - b_{n+r} < b_n - a_n$ ist, so ist ersichtlich, dass die beiden Functionen a_n, b_n convergent sind.

1) Eine solche Reihe $\varphi_0, \varphi_1 \cdots$ nennt E. Heine (Journal f. r. u. ang. Math. 74. Bd. S. 174) eine Elementarreihe.

2) Wenn φ_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen rationalen Grenzwerth α hat, so entsprechen die Fälle 2) und 3) nach dem 5. Satze a) in Nr. 3 dem Umstande, ob α positiv oder negativ ist.

die beständig abnehmen und kleiner werden, als jede rationale positive Zahl. Nun sind nur zwei Fälle denkbar. Entweder giebt es ein bestimmtes $\varepsilon^{(p)}$, dem eine ganze Zahl m_p so entspricht, dass $\varphi_{m_p} > \varepsilon^{(p)}$ oder $\varphi_{m_p} < -\varepsilon^{(p)}$ und

$$\varphi_{m_p} - \varepsilon^{(p)} < \varphi_{m_p+r} < \varphi_{m_p} + \varepsilon^{(p)} \qquad (r = 1, 2 \cdots)$$

ist, oder es giebt keine solche Zahl. Im ersten Falle sind die Zahlen φ_n der zweiten oder dritten Classe zuzuweisen; im zweiten gehören sie zur ersten Classe, indem man, was auch p sein mag, $-\varepsilon^{(p)} \leqq \varphi_{m_p} \leqq \varepsilon^{(p)}$, also nach (g) $-2\varepsilon^{(p)} < \varphi_{m_p+r} < 2\varepsilon^{(p)}$ hat. Somit unterliegt es keinem Zweifel, dass einer der drei im 2. Satze erwähnten Fälle eintreten muss; denn eine weitere Möglichkeit ist ausgeschlossen.

Es ist behauptet worden, dass der 2. Satz durch den vorstehenden Schluss nicht erwiesen sei, weil derselbe kein Verfahren an die Hand giebt, um nach einer endlichen Anzahl von Versuchen zu entscheiden, ob eine vorgelegte Function φ_n zur ersten, zweiten oder dritten Classe gehöre. Dieser Einwand kommt indess darauf hinaus, dass der Grundsatz des Widerspruchs, welcher besagt, dass von den in einer vollständigen Disjunction aufgezählten Möglichkeiten stets eine und nur eine eintreten muss, bei der Begründung der Arithmetik nicht verwendbar sei.

Der vorstehende Satz ist für die folgende Theorie der irrationalen Zahlen unentbehrlich. Man könnte ihn auch mit Hilfe eines anderen in Nr. 13 zu erwähnenden Satzes beweisen.

3. Satz. „Ist die Function φ_n convergent, so gilt das nämliche sowohl von der Function $\gamma \pm \varphi_n$, als auch von der Function $\gamma\varphi_n$; worin γ eine beliebige, von 0 verschiedene rationale Zahl bedeutet."

„Auch die Function $\frac{1}{\varphi_n}$ ist convergent, falls nur $\lim\limits_{n=+\infty} \varphi_n$ nicht 0 ist."

Die Beweise dieser Sätze bieten sich unmittelbar dar. Nach dem 2. Satze lassen sich, falls $\lim \varphi_n$ nicht 0 ist, zwei positive Zahlen $\varrho\ \mu$ so bestimmen, dass $|\varphi_n| > \varrho$ wenn nur $n > \mu$ ist. Man findet daher

$$\left|\frac{1}{\varphi_{n+r}} - \frac{1}{\varphi_n}\right| = \left|\frac{\varphi_{n+r} - \varphi_n}{\varphi_n \varphi_{n+r}}\right| < \frac{|\varphi_{n+r} - \varphi_n|}{\varrho^2} < \frac{\varepsilon}{\varrho^2}.$$

Ist nun ε' irgend eine positive Zahl, so ermittle man eine Zahl $\varepsilon < \varepsilon'\varrho^2$. Ihr entspricht in (f) eine Zahl $\mu' > 0$. Lässt man M die grössere unter den Zahlen μ, μ' sein, so ergiebt sich

$$\left|\frac{1}{\varphi_{n+r}} - \frac{1}{\varphi_n}\right| < \varepsilon', \text{ wenn nur } n > M \text{ ist.}$$

4. Satz. „Sind die Functionen φ_n und ψ_n convergent, so gilt dasselbe von den Functionen $\varphi_n \pm \psi_n$ und $\varphi_n \psi_n$. Die Function $\psi_n : \varphi_n$ ist ebenfalls convergent, wenn nur $\lim\limits_{n=+\infty} \varphi_n$ nicht 0 ist."

Wird neben der convergenten Function φ_n noch eine zweite

Function ψ_n von ähnlicher Beschaffenheit betrachtet, so kann man immer behaupten, dass neben (f) auch die Relation bestehe

$$|\psi_{n+r} - \psi_n| < \varepsilon, \text{ wenn nur } n > \mu \text{ ist.}$$

Somit folgt

$$|(\varphi_{n+r} \pm \psi_{n+r}) - (\varphi_n \pm \psi_n)| < 2\varepsilon, \text{ wenn nur } n > \mu \text{ ist.}$$

Da ferner

$$\varphi_{n+r}\psi_{n+r} - \varphi_n\psi_n = \varphi_{n+r}(\psi_{n+r} - \psi_n) + \psi_n(\varphi_{n+r} - \varphi_n)$$

ist und nach dem 1. Satze solche positive Zahlen ϱ', σ', μ' existiren müssen, dass für $n > \mu'$

$$|\varphi_n| < \varrho' \quad |\psi_n| < \sigma',$$

so wird für $n > M$, worunter wieder die grössere von den Zahlen μ und μ' verstanden sei,

$$|\varphi_{n+r}\psi_{n+r} - \varphi_n\psi_n| < (\varrho' + \sigma')\varepsilon$$

sein, worin $(\varrho' + \sigma')\varepsilon$ jede positive Zahl sein kann.

Corollare. 5. „Ist die Function φ_n convergent und ist eine zweite Function ψ_n so beschaffen, dass

$$\lim_{n=+\infty} (\psi_n - \varphi_n) = 0$$

ist, so ist auch ψ_n convergent.“ Folgt unmittelbar aus der Identität

$$\psi_n = \varphi_n - (\varphi_n - \psi_n).$$

6. „Betrachtet man eine bestimmte d. i. von n unabhängige Anzahl (p) von convergenten Functionen $\varphi_n, \psi_n, \chi_n \cdots \omega_n$ so sind auch die Functionen

$$\varphi_n + \psi_n + \chi_n + \cdots + \omega_n, \qquad \varphi_n \cdot \psi_n \cdot \chi_n \cdots \omega_n$$

convergent.“

7. **Satz.** „Wenn die Function φ_n von einem bestimmten Werthe des n an bei wachsendem n nicht abnimmt (zunimmt) und dabei jeder ihrer Werthe unter (über) einer und derselben rationalen Zahl γ liegt, so ist sie convergent.“ φ_n kann bei $\lim n = +\infty$ auch einen rationalen Grenzwerth haben.

Beweis.[1]) Wenn z. B. für $n \geqq m$

$$\varphi_n \leqq \varphi_{n+1} \text{ und dabei } \varphi_n < \gamma \quad (n = 0, 1, 2 \cdots)$$

ist, so muss sich jeder positiven rationalen Zahl ε eine andere solche Zahl μ so zuordnen lassen, dass für jeden Werth von n grösser als μ

$$0 \leqq \varphi_{n+r} - \varphi_n < \varepsilon \qquad (r = 1, 2 \cdots) \tag{h}$$

ist. Dies lässt sich indirect beweisen. Wäre die Convergenzbedingung (h) nicht erfüllt, so müsste jeder Zahl $\varrho > 0$ eine ganze Zahl $n > \varrho$

1) J. Tannery, Introduction etc. § 24.

und eine ganze Zahl $r \geqq 1$ so entsprechen, dass $\varphi_{n+r} - \varphi_n \geqq \varepsilon$ wäre. Nach Festsetzung einer Zahl ν könnten also ganze Zahlen n_0 r_0 so gefunden werden, dass

$$n_0 > \nu \quad \varphi_{n_0+r_0} - \varphi_{n_0} \geqq \varepsilon \quad \text{d. i.} \quad \varphi_{n_0+r_0} \geqq \varphi_{n_0} + \varepsilon$$

wäre. Denkt man sich ferner $\varrho = n_0 + r_0$, so gäbe es ganze Zahlen n_1 r_1 derart, dass

$$n_1 > n_0 + r_0 \quad \varphi_{n_1+r_1} - \varphi_{n_1} \geqq \varepsilon \quad \text{d. i.} \quad \varphi_{n_1+r_1} \geqq \varphi_{n_1} + \varepsilon \geqq \varphi_{n_0} + 2\varepsilon$$

wäre. Fährt man so zu schliessen fort, so würde man zu einem Stellenzeiger $n_h + r_h$ gelangen, wofür

$$\varphi_{n_h+r_h} \geqq \varphi_{n_0} + (h+1)\,\varepsilon$$

sein müsste. Würde man dann h so annehmen, dass

$$\varphi_{n_0} + (h+1)\,\varepsilon > \gamma$$

ist, so käme man in Widerspruch mit der Annahme, dass φ_n bei jedem Werthe von n kleiner als γ sein soll. Somit muss das Convergenzprinzip im vorliegenden Falle bestehen.

6. Aufstellung der irrationalen Zahlen und Vergleichung derselben untereinander und mit den rationalen Zahlen.

1. Definition. „Jeder von der ganzzahligen Veränderlichen n abhängigen Function φ_n, welche convergent ist, aber bei $\lim n = +\infty$ einen rationalen Grenzwerth nicht besitzt, ordnen wir ein neues von jeder rationalen Zahl verschiedenes Object zu, dem gegenüber φ_n die erzeugende Function heisst.“ Vorläufig wenden wir für das neue Object die Bezeichnung (φ_n) an.

Hierbei ist hervorzuheben, dass die Entscheidung darüber, ob eine vorgelegte Function φ_n bei $\lim n = +\infty$ einen rationalen Grenzwerth besitze oder nicht, nicht durch eine allgemeine Methode herbeigeführt werden kann, sondern in jedem Falle eigenthümliche, oft umständliche Untersuchungen verlangt.

Der 2., 3. und 4. Satz der vorigen Nummer gestatten nun, die neuen Objecte untereinander und mit den rationalen Zahlen zu vergleichen d. i. sie als Grössen aufzufassen, die mit den rationalen Zahlen zu einem Systeme zusammentreten, welches das der reellen Zahlen genannt wird. Die neuen Zahlen selbst erhalten in demselben das Prädicat „irrational“. Irrationale oder auch reelle Zahlen ohne Unterschied, ob rational oder irrational, werden in diesem Abschnitte mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ $\cdots$ bezeichnet.

Betrachten wir nämlich eine rationale Zahl β und zwei convergente Functionen von n, φ_n und ψ_n, so sind auch die Functionen $\varphi_n - \beta$ und $\varphi_n - \psi_n$ convergent, so dass sich auf sie der 2. Satz von Nr. 5 anwenden lässt.

2. Definition. „Man sagt $(\varphi_n) = (\psi_n)$, falls

$$\lim_{n=+\infty} (\varphi_n - \psi_n) = 0$$

ist d. i. zu jeder rationalen Zahl $\varepsilon > 0$ eine eben solche Zahl $\mu > 0$ gehört, derart dass $|\varphi_n - \psi_n| < \varepsilon$, wenn nur $n > \mu$ genommen wird."

3. Definition. „Man sagt $(\varphi_n) > \beta$ (rationale Zahl) und $\beta < (\varphi_n)$, wenn zwei positive rationale Zahlen ϱ, μ existiren, derart dass $\varphi_n - \beta > \varrho$, wenn nur n grösser ist als μ."

„Man sagt $(\varphi_n) < \beta$ und $\beta > (\varphi_n)$ wenn zwei positive Zahlen ϱ, μ existiren, derart dass $\varphi_n - \beta < -\varrho$ ist für alle $n > \mu$."

4. Definition. „Man sagt $(\varphi_n) > (\psi_n)$, wenn zwei positive rationale Zahlen ϱ, μ existiren, derart dass $\varphi_n - \psi_n > \varrho$ für alle $n > \mu$; und $(\varphi_n) < (\psi_n)$, wenn zwei solche Zahlen ϱ, μ existiren, derart dass $\varphi_n - \psi_n < -\varrho$ ist für alle $n > \mu$."

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass die in I. 2, 5 aufgestellten formalen Forderungen durch diese Definitionen erfüllt werden. Man braucht sich nur an die Formel

$$\varphi_n - \chi_n = (\varphi_n - \psi_n) + (\psi_n - \chi_n)$$

zu erinnern. Dass die Disjunction: gleich, grösser, kleiner vollständig sei, erhellt aus dem 2. Satze in Nr. 5, den man nur auf die Ausdrücke $\varphi_n - \beta$, $\varphi_n - \psi_n$ anzuwenden hat.

Nach der 3. Definition ist $(\varphi_n) > 0$, wenn zwei solche rationale positive Zahlen ϱ, μ existiren, dass für alle $n > \mu$ $\varphi_n > \varrho$, und $(\varphi_n) < 0$, wenn zwei solche Zahlen existiren, dass für alle $n > \mu$ $\varphi_n < -\varrho$ ist. Eine irrationale Zahl der ersten Art soll positiv oder absolut, eine der zweiten Art negativ heissen. Für jede von 0 verschiedene Zahl (φ_n) werden die Werthe von φ_n schliesslich gleichbezeichnet und die von $|\varphi_n|$ schliesslich grösser als ϱ; daher ist $(|\varphi_n|)$ eine positive irrationale Zahl, die der absolute Betrag von (φ_n) genannt und mit $|(\varphi_n)|$ bezeichnet wird. Nach dem 1. Corollar S. 152 ist $|(\varphi_n)| = (\varphi_n)$ oder $(-\varphi_n)$, je nachdem $(\varphi_n) >$ oder < 0.

Hat die Function φ_n bei $\lim n = +\infty$ den endlichen rationalen Grenzwerth α, so wollen wir ihn unter dem bis jetzt nicht erklärten Symbole (φ_n) verstehen.[1]) Insbesondere soll $(\alpha) = \alpha$ sein.

1) Die Erklärung von (φ_n) für den Fall dass

$$\lim_{n=+\infty} \varphi_n = \alpha \quad \text{(rational)}$$

ist, muss so eingerichtet sein, dass die in den Nrn. 6—10 aufgestellten Formeln giltig bleiben, falls die darin vorkommenden Functionen φ_n, ψ_n etc. bei $\lim n = +\infty$ rationale Grenzwerthe besitzen. So dürfte man z. B. (φ_n) nicht gleich $\varkappa\alpha$ (unter $\varkappa$ eine von 1 verschiedene, feste Zahl verstanden) annehmen, weil dann die Formel $(\varphi_n)\cdot(\psi_n) = (\varphi_n \cdot \psi_n)$ nicht bestehen würde. In der That würde, wenn $\lim \psi_n = \beta$ (rational) ist, links $\varkappa^2\alpha\beta$, rechts $\varkappa\alpha\beta$ erscheinen. Damit

Corollare. 1. „Wird aus der unbegrenzten Folge der ganzen Zahlen 0, 1, 2 ⋯ eine andere unbegrenzte Folge beständig wachsender Zahlen $k_0, k_1, k_2 \cdots k_n \cdots$ herausgehoben, so ist $(\varphi_n) = (\varphi_{k_n})$." — Da nämlich $k_n > n$ sein muss, so hat man nach der Convergenzbedingung (f) auf S. 146 neben

$$n > \mu \quad |\varphi_{k_n} - \varphi_n| < \varepsilon.$$

Mithin besteht nach der 2. Definition die Gleichung $(\varphi_n) = (\varphi_{k_n})$.

2. „Ist für $n > \mu$ $\varphi_n > \beta$ (rationale Zahl), so ist $(\varphi_n) \geqq \beta$. Wenn aber $(\varphi_n) < \beta$, so ist $(\varphi_n) \leqq \beta$." — Denn wäre im ersten Falle $(\varphi_n) < \beta$, so müsste schliesslich

$$\varphi_n - \beta < -\varrho < 0$$

also $\varphi_n < \beta$ sein. — Auf ähnliche Weise wird gezeigt der Satz:

3. „Ist für $n > \mu$

$$\varphi_n > \psi_n,$$

so folgt

$$(\varphi_n) \geqq (\psi_n)."$$

4. „Zu jeder rationalen Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine solche Zahl $\mu > 0$, dass

$$\varphi_n - \varepsilon < (\varphi_n) < \varphi_n + \varepsilon \qquad (n > \mu)." \qquad \text{(i)}$$

Beweis. Es sei $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Zufolge der Convergenzbedingung (f) gehört zu ε' eine Zahl $\mu' > 0$ so, dass neben

$$n > \mu' \quad -\varepsilon' < \varphi_{n+r} - \varphi_n < \varepsilon' \qquad (r = 1, 2 \cdots)$$

ist. Lassen wir hier n eine feste Zahl grösser als μ' und r eine Veränderliche sein, so haben wir für jeden Werth $r \geqq 1$

$$(\varphi_n - \varepsilon) - \varphi_{n+r} = -\varepsilon - (\varphi_{n+r} - \varphi_n) \quad (\varphi_n + \varepsilon) - \varphi_{n+r} = \varepsilon - (\varphi_{n+r} - \varphi_n),$$

also

$$(\varphi_n - \varepsilon) - \varphi_{n+r} < -(\varepsilon - \varepsilon') \quad (\varphi_n + \varepsilon) - \varphi_{n+r} > \varepsilon - \varepsilon'.$$

Da $\varepsilon - \varepsilon'$ eine positive Zahl ist, so schliessen wir hieraus nach der 3. Definition, dass

$$\varphi_n - \varepsilon < (\varphi_{n+r}) \quad \varphi_n + \varepsilon > (\varphi_{n+r})$$

ist. Nun ist nach dem 1. Corollar $(\varphi_{n+r}) = (\varphi_r)$. Also ergeben sich hieraus, wenn wir anstatt μ' μ schreiben, sofort die Beziehungen (i).

5. „Wenn die Function φ_n mit wachsendem n nicht abnimmt (zunimmt) und dabei jeder ihrer Werthe unter (über) einer festen Zahl γ liegt, so ist sie convergent (S. 149). Die Zahl (φ_n) ist grösser (kleiner) als jeder Werth von φ_n."

Beweis. Es sei z. B. für jedes n $\varphi_{n+1} \geqq \varphi_n$, jedoch sollen die

---

erledigt sich ein von E. Illigens (Math. Ann. Bd. 33 S. 159) gegen die in Rede stehende Annahme gemachter Einwand.

Werthe von φ_n nicht von einem bestimmten an alle einander gleich sein. Lassen wir dann m einen festen Werth von n sein, so giebt es dazu eine solche natürliche Zahl k, dass $\varphi_{m+k} > \varphi_m$ ist. Demnach ist, wenn nur $n \geqq m + k$ ist,

$$\varphi_n - \varphi_m \geqq \varphi_{m+k} - \varphi_m > 0.$$

Daraus folgt nach der 3. Definition, dass $(\varphi_n) > \varphi_m$ ist.

6. Betrachtet man, wie in Nr. 4, eine irrationale Zahl von der systematischen Form

$$\mathfrak{c} = (S_n) = \left(c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n}\right),$$

so besteht, was immer auch n für einen der Werthe $0, 1, 2 \cdots$ haben mag, die Relation

$$S_n < \mathfrak{c} < S_n + \frac{1}{e^n}.\text{“} \tag{k}$$

Sie ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satze unmittelbar, denn S_n nimmt bei wachsendem n nicht ab, $S_n + \frac{1}{e^n}$ nicht zu. (Vgl. Nr. 3.) Dabei ist auch $\left(S_n + \frac{1}{e^n}\right) = \mathfrak{c}$.

7. Eine irrationale Zahl (φ_n) lässt sich bezüglich jeder Grundzahl e in systematischer Form darstellen. D. h. zu jeder irrationalen Zahl $\mathfrak{a} = (\varphi_n)$ giebt es eine ganze Zahl $c_0 \gtreqless 0$ und eine endlose Reihe von Ziffern $c_1, c_2 \cdots c_n \cdots$ $(0 \leqq c_n \leqq e - 1)$ in der Art, dass, wenn

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} = S_n$$

gesetzt wird,

$$S_n < \mathfrak{a} < S_n + \frac{1}{e^n} \quad (n = 0, 1, 2 \cdots) \tag{1}$$

und $\mathfrak{a} = (S_n)$ ist.

Beweis.[1]) Nach (i) ist, wenn n eine feste Zahl grösser als μ bezeichnet,

$$\varphi_n - \varepsilon < \mathfrak{a} < \varphi_n + \varepsilon. \tag{m}$$

Bestimmt man nun zwei ganze Zahlen p, q so, dass

$$p \leqq \varphi_n - \varepsilon \qquad \varphi_n + \varepsilon \leqq q$$

ist, und vergleicht die Zahl $\mathfrak{a}$ der Reihe nach mit den ganzen Zahlen $p+1, p+2 \cdots q-1$, so gelangt man zu einer solchen ganzen Zahl c_0, dass $c_0 < \mathfrak{a} < c_0 + 1$ ist. Hierauf vergleicht man $\mathfrak{a}$ der Reihe nach mit den Zahlen

---

1) In Nr. 13 wird das Corollar 7 unmittelbar aus dem Convergenzprincip in Nr. 5 hergeleitet.

$$c_0 + \frac{1}{e},\ c_0 + \frac{2}{e} \cdots c_0 + \frac{e-1}{e}.$$

So wird man eine solche Ziffer c_1 finden, dass

$$c_0 + \frac{c_1}{e} < \mathfrak{a} < c_0 + \frac{c_1+1}{e}$$

ist. U. s. f. Auf diese Weise gelangt man zu einer endlosen Folge von Ziffern $c_1, c_2 \cdots$, welche so beschaffen ist, dass für jeden Werth von n die Beziehungen (l) bestehen. Die Function S_n definirt eine Zahl $\mathfrak{c} = (S_n)$, wofür die Ungleichungen (k) gelten.

Nun ist noch zu zeigen, dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ ist. Durch Gegenüberstellung der Ungleichungen (l) und (m) ergiebt sich, dass wenn nur $n > \mu$ ist, alsdann

$$S_n < \varphi_n + \varepsilon \qquad \varphi_n - \varepsilon < S_n + \frac{1}{e^n}$$

oder

$$-\varepsilon < \varphi_n - S_n < \varepsilon + \frac{1}{e^n}$$

ist. Denkt man sich μ auch so gross, dass für $n > \mu$ $1 : e^n < \varepsilon$ ist, so sieht man, dass wenn nur $n > \mu$ ist,

$$|\varphi_n - S_n| < 2\varepsilon$$

ist. 2ε kann jede positive rationale Zahl sein, folglich ist nach der 2. Definition

$$(\varphi_n) = (S_n).$$

8. „Gleiche irrationale Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ haben in Bezug auf eine und dieselbe Grundzahl e die nämliche systematische Form."

Denn vermöge der Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ folgt aus (l)

$$S_n < \mathfrak{a}' < S_n + \frac{1}{e^n} \qquad (n = 0, 1, 2 \cdots).$$

Ist die reelle Zahl $\mathfrak{a}$ grösser als eine andere $\mathfrak{b}$, so muss die erste Ziffer der systematischen Form der letzteren, welche sich von der entsprechenden der ersteren unterscheidet, grösser sein als diese. D. h. ist $\mathfrak{a} = (S_n)$, wie oben, und

$$\mathfrak{b} = \left(c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{e^{m-1}} + \frac{d_m}{e^m} + \cdots + \frac{d_n}{e^n}\right) = (S'_m),$$

so hat man $c_m > d_m$. — Daraus folgt, dass zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ unbegrenzt viele rationale Zahlen liegen. Denn wir haben

$$\mathfrak{a} > S_n > S_m \geqq S'_m + \frac{1}{e^m} > \mathfrak{b} \qquad (n > m);$$

zwischen S_n und S_m liegen aber unbegrenzt viele rationale Zahlen.

9. „**Eine reelle Zahl (φ_n), deren absoluter Betrag kleiner ist als jede positive Zahl $\mathfrak{e}$, ist Null.**“[1]

Denn wäre $(\varphi_n) > 0$, also ihr absoluter Betrag ebenfalls (φ_n), so gäbe es solche positive Zahlen ϱ, μ, dass für $n > \mu$

$$\varphi_n > \varrho > 0$$

ist. Somit wäre $(\varphi_n) \geqq \varrho$ gegen die Voraussetzung. Ebensowenig kann $(\varphi_n) < 0$ sein.

Die irrationalen Zahlen zerfallen in algebraische und transcendente. Von den ersteren ist jede Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten ganze Zahlen sind (vgl. Formel (1) auf S. 70). Von den letzteren genügt keine einer solchen Gleichung. Zu diesen gehört die in VIII. 12 erwähnte Zahl e und die Ludolph'sche Zahl π.

7. Addition der reellen Zahlen.

5. Definition. „Unter den Summen $\gamma + (\varphi_n)$, wo γ rational ist, verstehen wir die irrationale Zahl $(\varphi_n + \gamma)$. Die Zahl $(\varphi_n + \psi_n)$ heisst die Summe der irrationalen Zahlen (φ_n) und (ψ_n).“ Es sei also

$$\gamma + (\varphi_n) = (\varphi_n) + \gamma = (\varphi_n + \gamma); \quad (\varphi_n) + (\psi_n) = (\varphi_n + \psi_n);$$
$$0 + (\varphi_n) = (\varphi_n) + 0 = (\varphi_n).$$

Die Definitionen beruhen auf dem 3. und 4. Satze in Nr. 5. Aus dem 2. Satze in Nr. 3 entnehmen wir, dass wenn (φ_n), (ψ_n) rationale Grenzwerthe α, β bedeuten, $(\varphi_n + \psi_n)$ mit $\alpha + \beta$ übereinstimmt. Die analoge Bemerkung wird man auch zu den folgenden Nr. 8—10 zu machen haben.

Bezeichnen nun $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} \cdots$ reelle Zahlen überhaupt, so wird man aus der vorstehenden Definition ohne jede Schwierigkeit die folgenden Formeln ableiten können.

1) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$ so ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$.

Der Vereinfachung wegen zerlegen wir diesen Satz in die beiden: $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}$ $\mathfrak{a}' + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$. Die Beweise derselben sind einander ganz ähnlich, so dass wir nur den ersteren vorzunehmen brauchen. Es sei $\mathfrak{a} = (\varphi_n)$, $\mathfrak{a}' = (\varphi_n')$, $\mathfrak{b} = (\psi_n)$. Zufolge der Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ ist

$$\lim_{n=+\infty} (\varphi_n - \varphi_n') = 0.$$

Demnach hat auch

$$(\varphi_n + \psi_n) - (\varphi_n' + \psi_n) = \varphi_n - \varphi_n'$$

bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0. Mithin ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}$.

2) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$.

3) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$.

---

1) Durch diesen Satz wird das Princip der antiken Exhaustionsmethode (V. 6) in die Arithmetik übertragen.

4) Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}'$, so ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} > \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}$.

Da $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}'$ ist, so giebt es solche positive Zahlen ϱ, μ, dass wenn nur $n > \mu$ ist, $\varphi_n - \varphi_n' > \varrho$ ist. Mithin haben wir für $n > \mu$ auch

$$(\varphi_n + \psi_n) - (\varphi_n' + \psi_n) > \varrho;$$

es ist also

$$(\varphi_n + \psi_n) > (\varphi_n' + \psi_n), \text{ w. z. b. w.}$$

Damit ist aber erwiesen, dass bei der Addition der reellen Zahlen genau dieselben Regeln gelten, wie bei der von rationalen Zahlen.

8. Subtraction der reellen Zahlen. — Die Gleichungen

$$\alpha + \mathfrak{x} = (\varphi_n), \quad (\varphi_n) + \mathfrak{x} = \alpha, \quad (\varphi_n) + \mathfrak{x} = (\psi_n)$$

haben bez. die Auflösungen

$$\mathfrak{x} = (\varphi_n - \alpha), \quad (\alpha - \varphi_n), \quad (\psi_n - \varphi_n)$$

und wegen 7, 4) je nur diese eine.[1]) Man bezeichnet sie bez. mit

$$(\varphi_n) - \alpha, \quad \alpha - (\varphi_n), \quad (\psi_n) - (\varphi_n).$$

Ist $(\varphi_n) = (\psi_n)$, so ergiebt sich $\mathfrak{x} = 0$, und wenn $(\psi_n) \gtrless (\varphi_n)$, simultan $\mathfrak{x} \gtrless 0$. — Wenn

$$(\varphi_n) + (\psi_n) = 0 \ \{\text{d. i. wenn } (\varphi_n + \psi_n) = 0\},$$

so folgt

$$(\psi_n) = 0 - (\varphi_n),$$

wofür man kürzer

$$(\psi_n) = -(\varphi_n)$$

schreibt. Die Zahlen (φ_n) und $-(\varphi_n)$ heissen einander entgegengesetzt. Insbesondere ist wegen $(\varphi_n) + (-\varphi_n) = 0$

$$(-\varphi_n) = -(\varphi_n).$$

Aus den oben angeführten Gesetzen der Addition und der Möglichkeit und Eindeutigkeit der Subtraction in jedem Falle ergeben sich auch hier dieselben Regeln für das Rechnen mit Summen und Differenzen, wie bei den rationalen Zahlen.

Corollare. 1) Zwei reelle Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, deren Differenz dem absoluten Betrage nach kleiner ist als jede positive Zahl $\mathfrak{c}$, sind einander gleich.

Nach dem 9. Corollare in Nr. 6 ist nämlich $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = 0$, also muss $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ sein.

---

1) Dies lässt sich auch so zeigen. Soll (ω_n) eine solche Zahl sein, dass z. B. $(\omega_n) + (\varphi_n) = (\psi_n)$ ist, so muss $(\omega_n + \varphi_n) = (\psi_n)$ sein, also muss, wenn $\omega_n + \varphi_n - \psi_n = \delta_n$ gesetzt wird, $\lim \delta_n = 0$ sein. Es muss also $\omega_n = (\psi_n - \varphi_n) + \delta_n$ somit $(\omega_n) = (\psi_n - \varphi_n)$ sein.

2) Ist die Differenz $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ kleiner als jede Zahl $\mathfrak{e}>0$, so ist $\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{b}$.

Indirect zu beweisen.

3) „Es sei (φ_n) eine reelle Zahl. Dann gehört zu jeder positiven Zahl $\mathfrak{e}$ eine positive Zahl μ, derart dass

$$|(\varphi_n)-\varphi_n|<\mathfrak{e},$$

wenn nur $n>\mu$ ist."

Setzt man im 4. Cor. der Nr. 6 für ε eine rationale Zahl $\leqq\mathfrak{e}$, so folgt, dass wenn nur n grösser ist als eine gewisse Zahl $\mu>0$,

$$\varphi_n-\mathfrak{e}<(\varphi_n)<\varphi_n+\mathfrak{e}$$

ist, somit

$$|(\varphi_n)-\varphi_n|<\mathfrak{e}.$$

Nunmehr sind wir berechtigt, auch eine irrationale Zahl (φ_n) als Grenzwerth von φ_n bei unbeschränkt wachsenden n zu bezeichnen, so dass von nun an die Schreibweisen (φ_n) und $\lim\limits_{n=+\infty}\varphi_n$ als gleichbedeutend anzusehen sind. Fortan werden wir sagen, dass die auf S. 146 als convergent bezeichnete Function von n, φ_n, bei $\lim n=+\infty$ zum Grenzwerthe (φ_n) convergirt. Wir führen hier auch die Bezeichnung für die systematische Zahl (Nr. 4)

$$\mathfrak{c}=\lim_{n=+\infty}\left(c_0+\frac{c_1}{e}+\cdots+\frac{c_n}{e^n}\right)=c_0+\frac{c_1}{e}+\frac{c_2}{e^2}+\cdots$$

ein, indem wir unter dem letzten Ausdrucke eben den vorhergehenden Grenzwerth verstehen. Nur als eine Summe von unendlich vielen Gliedern darf man ihn hier noch nicht ansehen, sondern erst nach IX. 7.

Setzt man

$$\frac{c_{n+1}}{e^{n+1}}+\frac{c_{n+2}}{e^{n+2}}+\cdots=\mathfrak{r}_n \qquad (n=0,1,2\cdots),$$

so ist nach den Beziehungen (k) auf S. 153

$$0<\mathfrak{r}_n<\frac{c_{n+1}+1}{e^{n+1}}\leqq\frac{1}{e^n},\ \text{ also }\ \mathfrak{r}_n<\frac{1}{e^n}.$$

Dabei hat man

$$\mathfrak{c}=c_0+\frac{c_1}{e}+\cdots+\frac{c_n}{e^n}+\mathfrak{r}_n. \tag{n}$$

Ist $\mathfrak{r}_n>1:2e^n$, so schreibt man hierfür oft

$$\mathfrak{c}=c_0+\frac{c_1}{e}+\cdots+\frac{c_n+1}{e^n}+\left(\mathfrak{r}_n-\frac{1}{e^n}\right), \tag{p}$$

worin

$$\left|\mathfrak{r}_n-\frac{1}{e^n}\right|<\frac{1}{2e^n}\ \text{ist.}$$

9. Multiplication der reellen Zahlen.

6. Definition. „Bedeutet γ eine von Null verschiedene rationale Zahl, so nenne man die irrationale Zahl $(\gamma\varphi_n)$ das Product $\gamma\cdot(\varphi_n)$ oder $(\varphi_n)\cdot\gamma$. — Ferner sei

$$0\cdot(\varphi_n) = (\varphi_n)\cdot 0 = 0.$$

Endlich verstehe man unter dem Producte $(\varphi_n)\cdot(\psi_n)$ dieser irrationalen Zahlen die Zahl $(\varphi_n\psi_n)$." (Vgl. wieder Nr. 5, 3. und 4. Satz.) Es sei also

$$\gamma\cdot(\varphi_n) = (\varphi_n)\cdot\gamma = (\gamma\varphi_n) \qquad (\varphi_n)\cdot(\psi_n) = (\varphi_n\psi_n). \tag{q}$$

Diese Benennungen sind völlig berechtigt, denn es bestehen die folgenden Formeln:

1) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$, so ist $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{a}'\cdot\mathfrak{b}'$.

Wie auf S. 65 zerlegen wir diesen Satz in die beiden Sätze: $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{a}'\cdot\mathfrak{b}$ $\mathfrak{a}'\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{a}'\cdot\mathfrak{b}'$, wobei wir nur den ersteren zu beweisen brauchen. Lassen wir für $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a}'$ $\mathfrak{b}$ die nämlichen Erklärungen wie in Nr. 7 gelten, so haben wir die Differenz

$$\varphi_n\psi_n - \varphi_n'\psi_n = (\varphi_n - \varphi_n')\psi_n$$

zu betrachten. Vermöge der Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ entspricht jedem rationalen $\varepsilon > 0$ ein $\mu > 0$ so, dass neben

$$n > \mu \quad \text{stets} \quad |\varphi_n - \varphi_n'| < \varepsilon$$

ist. Andererseits wissen wir nach dem 1. Satze in Nr. 5, dass wegen der Convergenz der Function ψ_n jeder Werth derselben dem Betrage nach unter einer und derselben rationalen Zahl A liegt. Demnach ist, wenn $n > \mu$ ist,

$$|\varphi_n\psi_n - \varphi_n'\psi_n| < \mathsf{A}\varepsilon.$$

$\mathsf{A}\varepsilon$ stellt gerade wie ε jede positive rationale Zahl dar; wir haben demnach

$$(\varphi_n\psi_n) = (\varphi_n'\psi_n) \quad \text{d. i.} \quad \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{a}'\cdot\mathfrak{b}.$$

Nunmehr können wir aus den Erklärungen (q) sofort die Regeln über das Vorzeichen und den absoluten Betrag des Products, welche mit den entsprechenden in III. 14 übereinstimmen, herleiten. So ist z. B.

$$(-(\varphi_n))\cdot(-(\psi_n)) = (-\varphi_n)\cdot(-\psi_n) = (\varphi_n\psi_n) = (\varphi_n)\cdot(\psi_n).$$

2) $(\mathfrak{a}\pm\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}\pm\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} \qquad \mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}\pm\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\pm\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}$.

3) $(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})$.

4) $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}$.

Die Sätze 2)—4) ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Sätzen für die erzeugenden Functionen der darin vorkommenden Irrationalzahlen.

5) Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b} > 0$, so hat man $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} > \mathfrak{a}'\cdot\mathfrak{b}$; ist aber $\mathfrak{b} < 0$,

so hat man $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} < \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}$. — Zufolge der Annahme $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}'$ giebt es zwei solche positive rationale Zahlen ϱ, μ, dass wenn $n > \mu$, $\varphi_n - \varphi'_n > \varrho$ ist. Ist nun $\mathfrak{b} = (\psi_n)$ positiv, so haben wir nach S. 151 ferner eine positive rationale Zahl σ derart, dass für $n > \mu$ $\psi_n > \sigma$ ist. Mithin ist neben $n > \mu$

$$\varphi_n \psi_n - \varphi'_n \psi_n = (\varphi_n - \varphi'_n)\psi_n > \varrho\sigma,$$

somit ist nach der 3. oder 4. Definition in Nr. 6 $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} > \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}$.

Daraus folgt, dass bei der Multiplication der reellen Zahlen genau dieselben Regeln gelten, wie bei der der rationalen Zahlen.

10. Division der reellen Zahlen. — Die Gleichung $\gamma \cdot \mathfrak{x} = (\varphi_n)$ hat die Lösung $\mathfrak{x} = \left(\frac{\varphi_n}{\gamma}\right)$, wenn nur die rationale Zahl γ nicht 0 ist. — Die Gleichungen

$$(\varphi_n) \cdot \mathfrak{x} = \gamma \qquad (\varphi_n) \cdot \mathfrak{x} = (\psi_n),$$

worin (φ_n), (ψ_n) irrationale Zahlen bedeuten, haben bezüglich die Lösung

$$\mathfrak{x} = \left(\frac{\gamma}{\varphi_n}\right), \quad \left(\frac{\psi_n}{\varphi_n}\right).$$

Und zwar haben diese Gleichungen nach dem 5. Satze der vorigen Nummer je nur diese eine Lösung[1]), welche wir bezüglich mit

$$(\varphi_n) : \gamma, \quad \gamma : (\varphi_n), \quad (\psi_n) : (\varphi_n)$$

bezeichnen werden. Keiner dieser Quotienten ist Null.

Die Gleichung $(\varphi_n) \cdot \mathfrak{x} = 0$ hat die Lösung $\mathfrak{x} = 0$ und zufolge des soeben erwähnten Satzes nur diese eine.

Die Gleichung $0 \cdot \mathfrak{x} = (\psi_n)$ hat, wenn (ψ_n) nicht Null ist, gar keine Lösung; denn was $\mathfrak{x}$ auch für eine reelle Zahl sein mag, so ist $0 \cdot \mathfrak{x} = 0$. — Die Gleichung $0 \cdot \mathfrak{x} = 0$ wird durch jede reelle Zahl erfüllt.

Die Division ist mithin dann und nur dann möglich, wenn der Divisor nicht Null ist, und zwar stets in eindeutiger Weise. Aus diesem Satze folgt im Vereine mit den oben nachgewiesenen Gesetzen der Multiplication, dass bezüglich des Rechnens mit Producten und Quotienten auch hier die aus der Arithmetik der rationalen Zahlen bekannten Regeln gelten.

1) Dies lässt sich auch so nachweisen. Soll (ω_n) eine Zahl sein, wofür $(\omega_n) \cdot (\varphi_n) = (\psi_n)$ ist, so muss $(\omega_n \varphi_n) = (\psi_n)$, folglich wenn $\omega_n \varphi_n - \psi_n = \delta_n$ gesetzt wird, $\lim \delta_n = 0$ sein. Es muss demnach

$$\omega_n = \frac{\psi_n}{\varphi_n} + \frac{\delta_n}{\varphi_n}, \text{ also da } \lim \frac{\delta_n}{\varphi_n} = 0$$

ist, $(\omega_n) = (\psi_n : \varphi_n)$ sein.

Nachdem nunmehr erwiesen ist, dass die von uns eingeführten Zahlen die vier Species nach denselben Regeln, wie bei den rationalen Zahlen, zulassen, tritt ihre Analogie mit diesen klar zu Tage. Sie erstreckt sich auch darauf, dass für die positiven reellen Zahlen das Axiom des Archimedes besteht d. h. der Satz: „Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{b} > 0$, so giebt es doch ein Vielfaches von $\mathfrak{b}$, welches $\mathfrak{a}$ übertrifft: $p\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$.“ Da $\mathfrak{b} > 0$ ist, so giebt es nach dem 2. Cor. S. 152 rationale positive Zahlen β, kleiner als $\mathfrak{b}$. Andererseits giebt das 4. Corollar a. a. O. das Vorhandensein von rationalen Zahlen α, grösser als $\mathfrak{a}$, an. Da nun nach S. 61 ganze positive Zahlen p existiren, so dass $p\beta > \alpha$ ist, und $p\mathfrak{b} > p\beta$ ist, so folgt, dass $p\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$ ist.

11. Das System der reellen Zahlen zwischen irgend zwei derselben **$\mathfrak{a} < 0$, $\mathfrak{b} > 0$ ist stetig** (V. 7). Zunächst bemerken wir, dass es zu jeder reellen Zahl $\mathfrak{g}$ sowohl kleinere als grössere rationale Zahlen giebt, die davon um weniger verschieden sind, als eine beliebig vorgegebene positive Zahl $\mathfrak{e}$ (Nr. 8, Cor. 3)). Dieses vorausgesetzt, lässt sich nachweisen, dass kein Schnitt des reellen Zahlensystems eine Lücke in demselben anzeigt. Angenommen, es seien $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ die beiden Classen eines Schnittes desselben. Bestimmt man zwei ganze Zahlen a, b derart, dass

$$a \leqq \mathfrak{a} < a + 1, \quad b - 1 < \mathfrak{b} \leqq b,$$

so wird unter den Intervallen

$$(a, a+1) \cdots (b-1, b)$$

eines und nur eines $(c_0, c_0 + 1)$ vorkommen, das Zahlen der beiden Classen enthält. Desgleichen wird unter den e Intervallen

$$\left(c_0, c_0 + \frac{1}{e}\right) \cdots \left(c_0 + \frac{e-1}{e}, c_0 + 1\right)$$

ein und nur ein solches Intervall vorkommen u. s. f. Auf die angegebene Weise gelangt man zu einer Folge von ganzen Zahlen $c_0, c_1, c_2 \cdots$, die von der zweiten an Ziffern bedeuten, von der folgenden Eigenschaft. Jedes Intervall

$$\left(S_n, S_n + \frac{1}{e^n}\right) \qquad (n = 0, 1, 2 \cdots)$$

enthält Zahlen beider Classen. Dabei hat S_n (sowie e) dieselbe Bedeutung, wie in Nr. 2 (a). Dem Begriffe des Schnittes zufolge gehört auch die Zahl

$$\mathfrak{c} = \left(c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n}\right)$$

zu einer der beiden Classen desselben. Gehört sie z. B. zur ersten

Classe, so lässt sich zeigen, dass sie die grösste unter den diese Classe bildenden Zahlen ist.

Gäbe es nämlich darin eine Zahl $\mathfrak{m}_1 > \mathfrak{c}$, so nehme man die ganze Zahl n so gross an, dass $1 : e^n < \mathfrak{m}_1 - \mathfrak{c}$ ist. Also wäre

$$\mathfrak{m}_1 > \mathfrak{c} + \frac{1}{e^n}, \text{ somit da } \mathfrak{c} > S_n \text{ ist,}$$

$$\mathfrak{m}_1 > S_n + \frac{1}{e^n}.$$

Es gehören aber alle Zahlen, welche grösser als $S_n + \frac{1}{e^n}$ sind, der zweiten Classe an. Demnach kann es in der ersten Classe keine Zahl grösser als $\mathfrak{c}$ geben. Nimmt man aber an, dass $\mathfrak{c}$ zur zweiten Classe gehört, so überzeugt man sich auf ähnliche Art davon, dass $\mathfrak{c}$ die kleinste unter den Zahlen dieser Classe sein muss.

12. Der allgemeine Begriff der eindeutigen Function von n und ihres endlichen Grenzwerthes bei $\lim n = +\infty$.

Nach Einführung der irrationalen Zahlen können wir die eindeutige Function der Veränderlichen n, welche jeden ganzzahligen Werth von einem bestimmten an annehmen darf, ganz allgemein erklären. Wird jedem dieser Werthe von n durch eine arithmetische Vorschrift eine und nur eine reelle Zahl $\mathfrak{f}_n$ zugeordnet, so heisst $\mathfrak{f}_n$ eine eindeutige Function der unabhängigen Veränderlichen n. In einfachster Weise erfolgt die Zuordnung dadurch, dass mittelst der vier Rechnungsarten, jede in einer endlichen Anzahl von Malen verwendet, aus gegebenen reellen, rationalen oder irrationalen, Zahlen und dem Buchstaben n ein Ausdruck gebildet wird. Dabei ist dann die bereits in Nr. 2 erwähnte Unterscheidung zu beachten. Hierzu treten nunmehr Formeln von der Gestalt

$$\mathfrak{f}_n = \lim_{r=+\infty} \mathfrak{F}(n, r)$$

worin $\mathfrak{F}(n, r)$ einen aus gegebenen Zahlen und den beiden Buchstaben n und r, wovon auch der letztere jede natürliche Zahl sein darf, gebildeten Ausdruck bedeutet.

Dabei denken wir uns auch den Begriff des Grenzwerthes einer Function von n (Nr. 2 und 8) in der Art verallgemeinert, dass sowohl die letztere irrationale Werthe annehmen, als auch der Grenzwerth selbst eine irrationale Zahl sein darf. Wir sagen also: Die Function $\mathfrak{f}_n$ hat bei $\lim n = +\infty$ den endlichen Grenzwerth $\mathfrak{c}$ — kurz geschrieben, es ist

$$\lim_{n=+\infty} \mathfrak{f}_n = \mathfrak{c},$$

wenn sich jeder positiven Zahl $\mathfrak{e}$ eine andere $\mathfrak{m}$ so zuordnen lässt, dass wenn nur

$$n > \mathfrak{m} \qquad |\mathfrak{f}_n - \mathfrak{c}| < \mathfrak{e}$$

ist.

13. Nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass eine Function von n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth hat.

Wenn wir am Beginne von Nr. 4 φ_n durch die allgemeine eindeutige Function $\mathfrak{f}_n$ und die rationalen Zahlen α, ε, μ bezw. durch die reellen Zahlen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$ ersetzen, so finden wir, dass wenn

$$\lim_{n=+\infty} \mathfrak{f}_n = \mathfrak{c}$$

sein soll, dann jeder positiven Zahl $\mathfrak{e}$ eine andere $\mathfrak{m}$ so entsprechen muss, dass wenn nur

$$n > \mathfrak{m}, \qquad |\mathfrak{f}_{n+r} - \mathfrak{f}_n| < \mathfrak{e} \tag{1}$$

ist, was r auch für eine natürliche Zahl sein mag.

Nun entsteht die Frage, ob wenn diese Bedingung erfüllt ist, $\mathfrak{f}_n$ in der That bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth besitzt. Und zwar ist es unerlässlich, diese Frage schon hier zu entscheiden; denn würde die Antwort auf dieselbe nicht bejahend ausfallen, so wäre das System der reellen Zahlen nicht vollständig.

Es gilt indess wirklich der Satz (S): Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass eine eindeutige Function $\mathfrak{f}_n$ von n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth hat, besteht darin, dass jeder Zahl $\mathfrak{e} > 0$ eine andere $\mathfrak{m} > 0$ sich zuordnen lässt, dass wenn nur $n > \mathfrak{m}$ ist, $|\mathfrak{f}_{n+r} - \mathfrak{f}_n| < \mathfrak{e}$ ist, was für eine natürliche Zahl r auch sein mag. Demnach darf r nicht bloss jede bestimmte, sondern auch jede von n abhängige natürliche Zahl sein.

Um den Beweis dieses Satzes zu führen, wollen wir, was hier am nächsten zu liegen scheint, zuerst den folgenden zeigen. „Wenn die Function $\mathfrak{f}_n$ die Convergenzbedingung (1) erfüllt und bei $\lim n = +\infty$ nicht einen systematischen Bruch S_m zum Grenzwerthe hat, so giebt es sicher eine ganze Zahl $c_0 \left(\gtreqless 0\right)$ und eine endlose Folge von Ziffern

$$c_1, c_2 \cdots c_p \cdots \qquad (0 < c_p \leqq e-1)$$

von der Beschaffenheit, dass jedem Werthe des Index p (mit Einschluss von $p = 0$) eine natürliche Zahl m_p sich so zuordnen lässt, dass für

$$n > m_p \qquad S_p < \mathfrak{f}_n < S_p + \frac{1}{e^p} \qquad (p = 0, 1, 2 \cdots) \tag{2}$$

ist."

Dabei ist wie in Nr. 2

$$S_p = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_p}{e^p}.$$

Der Satz geht unmittelbar aus dem nachstehenden hervor: „Es sei q eine ganze positive Zahl. Wenn $\mathfrak{f}_n$ bei $\lim n = +\infty$ keinen rationalen Grenzwerth mit dem Nenner q besitzt, so existiren sicher ganze Zahlen h, M derart dass

$$\frac{h}{q} < \mathfrak{f}_n < \frac{h+1}{q} \quad \text{für alle } n > M.\text{“}$$

Aus (1) ergiebt sich, wenn $\mathfrak{e} = \frac{1}{2q}$ und die ganze Zahl m grösser als das zugehörige $\mathfrak{m}$ vorausgesetzt wird,

$$\mathfrak{f}_m - \frac{1}{2q} < \mathfrak{f}_{m+r} < \mathfrak{f}_m + \frac{1}{2q} \qquad (r = 1, 2 \cdots).$$

Man bringe $\mathfrak{f}_m$ auf die Form

$$\mathfrak{f}_m = \frac{Q}{q} + \mathfrak{r} \qquad \left(-\frac{1}{2q} < \mathfrak{r} \leqq \frac{1}{2q}\right),$$

worin Q eine ganze Zahl bedeutet. Ist zufällig $\mathfrak{r} = \frac{1}{2q}$, so findet man

$$\frac{Q}{q} < \mathfrak{f}_{m+r} < \frac{Q+1}{q},$$

kann somit $h = Q$ setzen. Wenn aber $\mathfrak{r}$ nicht diesen Werth hat, so ergiebt sich zunächst nur, dass

$$\frac{Q-1}{q} < \mathfrak{f}_{m+r} < \frac{Q+1}{q}$$

ist. Um den Unterschied der Grenzen auf $\frac{1}{q}$ einzuschränken, kann man so verfahren. Man setze in (1)

$$\mathfrak{e} = 1 : 2qe^s \qquad (s \geqq 1)$$

und bezeichne mit $m^{(s)}$ eine ganze Zahl grösser als ein zu diesem Werthe von $\mathfrak{e}$ gehöriges $\mathfrak{m}$. Dann ergeben sich die Beziehungen

$$\mathfrak{f}_{m^{(s)}} - \frac{1}{2q \cdot e^s} < \mathfrak{f}_{m^{(s)}+r} < \mathfrak{f}_{m^{(s)}} + \frac{1}{2q \cdot e^s} \qquad (\mathfrak{r} = 1, 2 \cdots).$$

Nach Ausführung der Rechnung

$$\mathfrak{f}_{m^{(s)}} = \frac{Q^{(s)}}{q \cdot e^s} + \mathfrak{r}^{(s)} \qquad \left(-\frac{1}{2q \cdot e^s} < \mathfrak{r}^{(s)} \leqq \frac{1}{2q \cdot e^s}\right),$$

wo $Q^{(s)}$, wie die unten folgenden $h^{(s)}\ r^{(s)}$, eine ganze Zahl bedeutet, findet man, wenn

$$\frac{Q^{(s)}}{e^s} = h^{(s)} + \frac{r^{(s)}}{e^s} \qquad (0 \leqq r^{(s)} \leqq e^s - 1)$$

gesetzt und die Annahme $\mathfrak{r}^{(s)} = 1 : 2q \cdot e^s$, welche $h = h^{(s)}$ liefert, nicht weiter berücksichtigt wird:

$$(3)\qquad \frac{h^{(s)}}{q} + \frac{r^{(s)}-1}{q\cdot e^s} < \mathfrak{f}_{m^{(s)}+r} < \frac{h^{(s)}}{q} + \frac{r^{(s)}+1}{q\cdot e^s} \leqq \frac{h^{(s)}+1}{q}.$$

Ist $r^{(k)}$ der erste von 0 verschiedene Divisionsrest, so wird

$$\frac{h^{(k)}}{q} < \mathfrak{f}_{m^{(k)}+r} < \frac{h^{(k)}+1}{q}$$

sein, so dass $h^{(k)} = h$, $m^{(k)} = M$ zu setzen ist. Wollte man annehmen, dass wie gross auch s sei, stets $r^{(s)} = 0$ sei, so würde sich ergeben dass

$$\lim_{n=+\infty} \mathfrak{f}_n = \frac{h^{(1)}}{q}$$

sei. Man bemerke zunächst, dass wenn

$$r^{(s)} = r^{(s+1)} = 0$$

ist, dann auch

$$h^{(s)} = h^{(s+1)}$$

sein muss. Schreibt man in (3) anstatt s $s+1$ und setzt in der so erhaltenen Relation $r = l$ (es sei $m^{(s+1)} + l > m^{(s)}$), in (3) selbst aber

$$r = m^{(s+1)} - m^{(s)} + l,$$

so folgt unmittelbar

$$\frac{h^{(s)}}{q} - \frac{1}{qe^s} < \frac{h^{(s+1)}}{q} + \frac{1}{q\cdot e^{s+1}},$$

$$\frac{h^{(s+1)}}{q} - \frac{1}{q\cdot e^{s+1}} < \frac{h^{(s)}}{q} + \frac{1}{q\cdot e^s},$$

woraus man schliesst, dass

$$|h^{(s+1)} - h^{(s)}| < \frac{1}{e^s} + \frac{1}{e^{s+1}} \leqq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4},$$

also

$$h^{(s)} = h^{(s+1)}$$

sein muss. Wenn nun

$$r^{(1)} = r^{(2)} = \cdots = 0,$$

so folgt

$$h^{(1)} = h^{(2)} = \cdots,$$

so dass aus (3) sich ergiebt

$$\left|\mathfrak{f}_n - \frac{h^{(1)}}{q}\right| < \frac{1}{q\cdot e^s} \qquad (n > m^{(s)})$$

d. i.

$$\lim_{n=+\infty} \mathfrak{f}_n = h^{(1)} : q.$$

Es kann die Aufgabe vorkommen, den Zähler $h^{(k)}$ wirklich zu berechnen. Sie wird durch das soeben entwickelte Verfahren nur dann mit Sicherheit gelöst, wenn man von vornherein weiss, dass ein rationaler Grenzwerth mit dem Nenner q für $\mathfrak{f}_n$ ausgeschlossen ist.

In einem solchen Falle muss man nach einer endlichen Anzahl von Versuchen die gewünschte Zahl $h^{(k)}$ erhalten.

Setzt man im obigen Hilfssatze $q = 1$, so erhellt, dass in dem Falle, wo die Function $\mathfrak{f}_n$ bei $\lim n = +\infty$ nicht einen ganzzahligen Grenzwerth besitzt, immer ganze Zahlen c_0 m_0 existiren müssen, einander in der Weise entsprechend, dass

$$c_0 < \mathfrak{f}_n < c_0 + 1 \qquad (n > m_0).$$

Und wenn ein rationaler Grenzwerth, dessen Nenner eine Potenz von e ist, für $\mathfrak{f}_n$ ausgeschlossen wird, so müssen sich bei beliebigem p ganze Zahlen h_p, m_p so ermitteln lassen, dass

$$\frac{h_p}{e^p} < \mathfrak{f}_n < \frac{h_p + 1}{e^p} \quad (n > m_p).$$

Man hat also auch

$$\frac{h_{p+1}}{e^{p+1}} < \mathfrak{f}_n < \frac{h_{p+1} + 1}{e^{p+1}} \qquad (n > m_{p+1}).$$

Setzt man in beiden Formeln für n einen Werth, der grösser ist als beide Zahlen m_p, m_{p+1}, so muss man schliessen, dass

$$\frac{h_p}{e^p} < \frac{h_{p+1} + 1}{e^{p+1}}, \qquad \frac{h_{p+1}}{e^{p+1}} < \frac{h_p + 1}{e^p},$$

d. i.

$$-1 < h_{p+1} - eh_p < e \quad \text{oder} \quad 0 \leqq h_{p+1} - eh_p \leqq e - 1,$$

also

$$h_{p+1} = eh_p + c_{p+1} \qquad 0 \leqq c_{p+1} \leqq e - 1$$

$$\frac{h_{p+1}}{e^{p+1}} = \frac{h_p}{e^p} + \frac{c_{p+1}}{e^{p+1}}$$

ist. Setzt man hier zunächst $p = 0$, so hat man $h_0 = c_0$ zu nehmen, so dass sich ergiebt

$$\frac{h_1}{e} = c_0 + \frac{c_1}{e}.$$

Setzt man dann nacheinander $p = 1, 2 \cdots$, so findet man

$$\frac{h_2}{e^2} = \frac{h_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2}$$

u. s. f. Damit ist der Satz (2) auf S. 162 erwiesen.

Wir gelangen nunmehr zu folgendem Resultat. — Entweder hat die Function $\mathfrak{f}_n$ einen Grenzwerth von der Form

$$S_m = c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_m}{e^m},$$

oder sie hat den Grenzwerth

$$\mathfrak{c} = \left(c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n}\right).$$

Da nämlich zufolge der Formel (k) auf S. 153

$$S_p < \mathfrak{c} < S_p + \frac{1}{e^p}$$

ist, so folgt nach (2)

$$|\mathfrak{c} - \mathfrak{f}_n| < \frac{1}{e^p} \quad \text{für } n > m_p,$$

also, da $1 : e^p$ bei $\lim p = +\infty$ den Grenzwerth 0 hat, die Formel

$$\lim_{n=+\infty} \mathfrak{f}_n = \mathfrak{c}.$$

Dass neben $\mathfrak{c}$ nicht auch eine davon verschiedene Zahl Grenzwerth von $\mathfrak{f}_n$ sein kann, folgt unmittelbar aus dem 1. Corollar in Nr. 8.

14. Verallgemeinerung der Sätze über die Grenzwerthe der Functionen von n bei $\lim n = +\infty$ in Nr. 3 und des 7. Satzes in Nr. 5.

Die fünf Sätze in Nr. 3 lassen sich ohne Weiteres dahin ausdehnen, dass die in ihnen vorkommenden Functionen φ_n, ψ_n irgendwelche eindeutige Functionen von n, die bei $\lim n = +\infty$ einen reellen, rationalen oder irrationalen, Grenzwerth besitzen, und die Zahlen γ, β beliebige reelle, die Zahlen ϱ, μ beliebige positive Zahlen sein dürfen. Und zwar bleiben die Beweise der Sätze völlig ungeändert. Wir machen besonders auf die oft vorkommenden Sätze 1., 2. und 3. auf S. 152 aufmerksam, welche zum dritten und fünften der obigen Sätze gehören. — Insbesondere begegnet man häufig dem Satze: „Ist $|\varphi_n| < |\psi_n|$ und es hat ψ_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth Null, so auch φ_n.“ Er folgt unmittelbar aus der Erklärung des Grenzwerthes Null auf S. 141.

Dazu fügen wir ferner die Bemerkung: „Die Summe $\varphi_n + \psi_n$ hat bei $\lim n = +\infty$ einen unendlichen Grenzwerth, wenn das eine Glied einen endlichen, das andere den Grenzwerth $\pm\infty$ oder beide Glieder einen unendlichen Grenzwerth vom nämlichen Vorzeichen haben. — Das Product $\varphi_n \psi_n$ hat einen unendlichen Grenzwerth, wenn der eine Factor den Grenzwerth $\pm\infty$, der andere einen Grenzwerth hat, der nicht Null ist.“

Haben die Functionen φ_n ψ_n bei $\lim n = +\infty$ beide den Grenzwerth Null, so lässt sich über das Verhalten des Bruches $\psi_n : \varphi_n$ bei $\lim n = +\infty$ kein allgemeiner Satz mehr aufstellen. Dies ist gemeint, wenn man von der „unbestimmten Form $\frac{0}{0}$“ spricht. Solche Formen sind ferner

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \infty \cdot 0 \qquad \infty - \infty$$

d. h. das Verhalten bei $\lim n = +\infty$ eines Bruches, dessen Zähler und Nenner dabei je einen unendlichen Grenzwerth haben, eines Productes, wovon der eine Factor den Grenzwerth 0, der andere einen

unendlichen Grenzwerth hat und endlich einer Differenz, deren Minuend und Subtrahend gleichbezeichnete unendliche Grenzwerthe haben, bildet in jedem Falle den Gegenstand einer eigenen Untersuchung.

Dieselbe Verallgemeinerung, wie die vorhin erwähnten Sätze, gestattet der 7. Satz in Nr. 5. Wir können nunmehr aber den folgenden Satz aussprechen:

„Wenn die eindeutige Function $\mathfrak{f}_n$ von einem bestimmten Werthe des n an bei wachsendem n nicht abnimmt (zunimmt) und dabei jeder ihrer Werthe unter (über) einer und derselben Zahl $\mathfrak{g}$ liegt, so hat sie bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth $\mathfrak{c}$, welcher grösser (kleiner) als jeder Werth von $\mathfrak{f}_n$ ist.“ — Durch den zum 7. Satze in Nr. 5 gegebenen Beweis, wobei nur φ_n, γ, ε bezw. durch $\mathfrak{f}_n$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{e}$ zu ersetzen sind, stellen wir nämlich fest, dass die Function $\mathfrak{f}_n$ der Convergenzbedingung (1) auf S. 162 genügt. Sie hat also nach dem Satze (S) a. a. O. bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth $\mathfrak{c}$, auf den noch das 5. Corollar von Nr. 6 angewendet werden kann.

15. Die obere und untere Grenze (Schranke) von unbegrenzt vielen Zahlen $\mathfrak{f}_n$ $(n = 0, 1, 2 \cdots)$[1].

Wenn es zu jeder positiven Zahl $\mathfrak{G}$ solche Werthe der ganzen Zahl n giebt, dass $\mathfrak{f}_n > \mathfrak{G}$ ist, so sagen wir die Zahlen $\mathfrak{f}_n$ haben die obere Grenze $+\infty$ (plus unendlich).

Ist jede Zahl $\mathfrak{f}_n$ kleiner als eine und dieselbe Zahl $\mathfrak{b}$, so giebt es entweder unter den Zahlen $\mathfrak{f}_n$ eine grösste $\mathfrak{g}$ oder nicht. Im letzteren Falle ist eine Zahl $\mathfrak{g}$ vorhanden von der Beschaffenheit, dass jedes $\mathfrak{f}_n$ kleiner als $\mathfrak{g}$ ist, es aber zu jeder positiven Zahl $\mathfrak{e}$ Werthe von n giebt, wofür $\mathfrak{f}_n > \mathfrak{g} - \mathfrak{e}$ ist. In beiden Fällen heisst $\mathfrak{g}$ die obere Grenze der Zahlen $\mathfrak{f}_n$. Diese Behauptung lässt sich leicht beweisen. Unter den Zahlen

$$\mathfrak{f}_0 \; \mathfrak{f}_1 \cdots \mathfrak{f}_n \tag{1}$$

ist jedenfalls eine, $\mathfrak{g}_n$, die grösste. Ebenso sei $\mathfrak{g}_{n+1}$ die grösste Zahl in der Reihe $\mathfrak{f}_0 \; \mathfrak{f}_1 \cdots \mathfrak{f}_{n+1}$. Ist $\mathfrak{f}_{n+1}$ nicht grösser als $\mathfrak{g}_n$, so ist $\mathfrak{g}_{n+1} = \mathfrak{g}_n$, ist jedoch $\mathfrak{f}_{n+1}$ grösser als $\mathfrak{g}_n$, so ist $\mathfrak{g}_{n+1} = \mathfrak{f}_{n+1}$. Man sieht, es ist stets $\mathfrak{g}_{n+1} \geqq \mathfrak{g}_n$. Dabei ist $\mathfrak{g}_n < \mathfrak{b}$. $\mathfrak{g}_n$ hat demnach nach dem letzten Satze in Nr. 14 bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth $\mathfrak{g}$, grösser als jede Zahl $\mathfrak{g}_n$. D. h. jedem $n > 0$ entspricht eine solche natürliche Zahl m, dass für $n \geqq m$

$$0 < \mathfrak{g} - \mathfrak{g}_n < \mathfrak{e}, \quad \text{also } \mathfrak{g}_n > \mathfrak{g} - \mathfrak{e}$$

ist. $\mathfrak{g}_n$ ist aber ein Werth in der Reihe (1). Zugleich sieht man, dass wegen $\mathfrak{f}_n \leqq \mathfrak{g}_n$ und $\mathfrak{g}_n < \mathfrak{g}$ auch $\mathfrak{f}_n < \mathfrak{g}$ ist.

---

1) Diese Begriffe verdankt man Weierstrass. Die Bezeichnung „Schranke“ nach M. Pasch (Math. Ann. 30. Bd. S. 133).

Auf ähnliche Weise gelangt man zum Begriffe der unteren Grenze der Zahlen $\mathfrak{f}_n$. Entsprechen jeder negativen Zahl $-\mathfrak{G}$ Werthe von n, wofür $\mathfrak{f}_n < -\mathfrak{G}$ ist, so legen wir den $\mathfrak{f}_n$ die untere Grenze $-\infty$ bei. Sind die Zahlen $\mathfrak{f}_n$ sämmtlich grösser als eine und dieselbe Zahl $\mathfrak{a}$, so giebt es entweder unter ihnen eine kleinste Zahl $\mathfrak{k}$ oder nicht. Im letzteren Falle lässt sich aber eine Zahl $\mathfrak{k}$ von der Beschaffenheit angeben, dass jedes $\mathfrak{f}_n$ grösser als $\mathfrak{k}$ ist, es aber zu jedem $\mathfrak{e} > 0$ Werthe von n giebt, wofür $\mathfrak{f}_n < \mathfrak{k} + \mathfrak{e}$ ist. In beiden Fällen heisst $\mathfrak{k}$ die untere Grenze der Zahlen $\mathfrak{f}_n$.

16. Die obere und untere Grenze (Unbestimmtheitsgrenze) **einer Function** $\mathfrak{f}_n$ **bei** $\lim n = +\infty$, welche bei diesem Grenzübergang keinen unendlichen Grenzwerth hat.[1])

Die Function $\mathfrak{f}_n$ kann, während n die Reihe der ganzen Zahlen von 0 an durchläuft, wie z. B. $(-1)^n n$, die obere Grenze $+\infty$ und die untere $-\infty$ haben. Man sagt auch, dass $\mathfrak{f}_n$ diese Grenzen bei $\lim n = +\infty$ hat.

Es sei nunmehr angenommen, dass $\mathfrak{f}_n$ $(n = 0, 1 \cdots)$ eine endliche obere Grenze besitzt, dass also jeder dieser Werthe unter einer und derselben Zahl $\mathfrak{b}$ liegt. Dann lässt sich, wie wir jetzt zeigen wollen, der Function $\mathfrak{f}_n$ stets eine Zahl zuordnen, welche im Falle, dass $\mathfrak{f}_n$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth hat, damit zusammenfällt.

Bezeichnet m einen bestimmten Werth von n, so haben die Werthe

$$\mathfrak{f}_m, \mathfrak{f}_{m+1} \cdots \tag{1*}$$

eine endliche obere Grenze $\mathfrak{g}_m$, welche die Zahl $\mathfrak{b}$ nicht überschreitet. [Es ist nämlich $\mathfrak{g}_m$ entweder einem dieser Werthe gleich oder es giebt zu jedem $\mathfrak{e} > 0$ unter den Werthen von $n \geqq m$ mindestens einen solchen, n_1, dass

$$\mathfrak{f}_{n_1} > \mathfrak{g}_m - \mathfrak{e} \tag{2}$$

ist. Im zweiten Falle ist $\mathfrak{b} > \mathfrak{g}_m - \mathfrak{e}$ oder $\mathfrak{e} > \mathfrak{g}_m - \mathfrak{b}$, woraus bei der Willkürlichkeit von $\mathfrak{e}$ nach Cor. 2 in Nr. 8 folgt, dass $\mathfrak{g}_m \leqq \mathfrak{b}$ ist.] Nun ist

$$\mathfrak{g}_{m+1} \leqq \mathfrak{g}_m. \tag{3}$$

[Denn mindestens für ein $n \geqq m+1$ muss nach (2) $\mathfrak{f}_n > \mathfrak{g}_{m+1} - \mathfrak{e}$ sein. Daneben ist für

$$n \geqq m \qquad \mathfrak{g}_m \geqq \mathfrak{f}_n; \tag{4}$$

somit ist $\mathfrak{g}_m > \mathfrak{g}_{m+1} - \mathfrak{e}$, also $\mathfrak{g}_m \geqq \mathfrak{g}_{m+1}$.]

---

1) Diese Unbestimmtheitsgrenzen waren schon Cauchy bekannt (vgl. C. d'Analyse p. 121). Er bezeichnet die obere a. a. O. freilich ungenau als Maximum. Die allgemeine Erklärung derselben verdankt man P. du Bois-Reymond (vgl. Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen, Antrittsprogramm (1871)).

Zufolge der Beziehung (3) nimmt die Function $\mathfrak{g}_m$ bei wachsendem m nicht zu. Dabei kann jedoch $\mathfrak{g}_m$ nicht unter jede Zahl sinken. [Denn würde jeder Zahl $-\mathfrak{G}$ eine ganze Zahl p so entsprechen, dass $\mathfrak{g}_p < -\mathfrak{G}$ ist, so wäre vermöge der Beziehung (3) $\mathfrak{g}_m < -\mathfrak{G}$ für jedes $m \geqq p$. Also hätte man nach (4) $\mathfrak{f}_n < -\mathfrak{G}$, wenn nur $n \geqq p$ ist. Die Function $\mathfrak{f}_n$ hätte demnach bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth $-\infty$, was ja ausgeschlossen sein soll.]

Bleibt aber $\mathfrak{g}_m$ für jedes m über einer festen Zahl $\mathfrak{A}$, so schliessen wir aus der Beziehung (3) nach der Verallgemeinerung, welche dem 7. Satze von Nr. 5 in Nr. 14 zu theil geworden ist, dass $\mathfrak{g}_m$ bei $\lim m = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth $\mathfrak{D}$ besitzt d. h. dass jeder Zahl $\mathfrak{e} > 0$ eine andere $\mathfrak{m} > 0$ so entspricht, dass neben

$$n > \mathfrak{m} \qquad \mathfrak{D} \leqq \mathfrak{g}_n < \mathfrak{D} + \mathfrak{e} \tag{5}$$

ist. Um das Verhalten der Function $\mathfrak{f}_n$ selbst gegenüber der Zahl $\mathfrak{D}$ zu untersuchen, wollen wir unter n irgend eine ganze Zahl grösser als $\mathfrak{m}$ verstehen. Alsdann ist zufolge der Erklärung von $\mathfrak{g}_n$ $\mathfrak{f}_n \leqq \mathfrak{g}_n$, somit nach (5)

$$\mathfrak{f}_n < \mathfrak{D} + \mathfrak{e}.$$

Andererseits giebt es aber zu jedem Werthe von n einen grösseren, n_1, wofür $\mathfrak{f}_{n_1} > \mathfrak{g}_n - \mathfrak{e}$ ist. Folglich hat man, nach (5),

$$\mathfrak{f}_{n_1} > \mathfrak{D} - \mathfrak{e}.$$

Wir haben demnach den nachstehenden Satz erlangt:

Wenn jeder Werth der Function $\mathfrak{f}_n$ unter einer und derselben Zahl $\mathfrak{b}$ liegt, so giebt es **eine** Zahl $\mathfrak{D}$, welche so beschaffen ist, dass sich jeder positiven Zahl $\mathfrak{e}$ eine andere $\mathfrak{m}$ so zuordnen lässt, dass wenn nur $n > m$,

$$\mathfrak{f}_n < \mathfrak{D} + \mathfrak{e} \tag{6}$$

ist, dass aber zu jedem $n > m$ ein Werth $n_1 > n$ gehört, wofür

$$\mathfrak{f}_{n_1} > \mathfrak{D} - \mathfrak{e} \tag{7}$$

ist. Die Zahl $\mathfrak{D}$ wird als die obere Grenze (deutlicher: Unbestimmtheitsgrenze) der Function $\mathfrak{f}_n$ bei $\lim n = +\infty$ bezeichnet. Man schreibt $\mathfrak{D} = \limsup\limits_{n=+\infty} \mathfrak{f}_n$. — Hat diese Function bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth $\mathfrak{c}$, so ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{c}$. In diesem Falle gehört nämlich zu jedem $\mathfrak{e} > 0$ ein $\mathfrak{m}' > 0$ derart, dass neben $n > \mathfrak{m}'$

$$\mathfrak{c} - \mathfrak{e} < \mathfrak{f}_n < \mathfrak{c} + \mathfrak{e} \tag{8}$$

ist (S. 162). Lassen wir nun n eine ganze Zahl grösser als $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ sein, so ergiebt sich nach (6) und (8)

$$\mathfrak{c} - \mathfrak{e} < \mathfrak{D} + \mathfrak{e}$$

und nach (7) und (8), da man in der letzteren Beziehung $n = n_1$ setzen darf,

$$\mathfrak{D} - \mathfrak{e} < \mathfrak{c} + \mathfrak{e}.$$

Demnach ist $|\mathfrak{O} - \mathfrak{c}| < 2\mathfrak{e}$, also wegen der Willkürlichkeit von $\mathfrak{e}$

$$\mathfrak{O} - \mathfrak{c} = 0.$$

Wird angenommen, dass jeder Werth von $\mathfrak{f}_n$ $(n = 0, 1 \cdots)$ über einer und derselben Zahl $\mathfrak{a}$ liegt, so gelangen wir durch eine ähnliche Betrachtung, welche wir an der unteren Grenze der Zahlen (1*) anzustellen haben, zur unteren Grenze (Unbestimmtheitsgrenze) $\mathfrak{U}$ der Function $\mathfrak{f}_n$ bei $\lim n - +\infty$. Es giebt nämlich dann eine Zahl $\mathfrak{U}$ von der Eigenschaft, dass sich der Zahl $\mathfrak{e} > 0$ eine andere $\mathfrak{n}$ so zuordnen lässt, dass wenn nur $n > \mathfrak{n}$,

$$\mathfrak{f}_n > \mathfrak{U} - \mathfrak{e} \tag{9}$$

ist, dass aber zu jedem $n > \mathfrak{n}$ ein Werth $n_2 > n$ gehört, wofür

$$\mathfrak{f}_{n_2} < \mathfrak{U} + \mathfrak{e}$$

ist. Man schreibt jetzt

$$\mathfrak{U} = \liminf_{n=+\infty} \mathfrak{f}_n.$$

Hat die Function $\mathfrak{f}_n$ bei $\lim n = +\infty$ den endlichen Grenzwerth $\mathfrak{c}$, so ist $\mathfrak{U} = \mathfrak{c}$.

Zu einer endlichen Function $\mathfrak{f}_n$ d. h. einer solchen, deren Werthe für $n = 0, 1 \cdots$ sämmtlich zwischen den nämlichen Zahlen $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ liegen, gehören demnach im Allgemeinen zwei Zahlen $\mathfrak{O}$ $\mathfrak{U}$, ihre Grenzen bei $\lim n = +\infty$. Dabei ist $\mathfrak{O} \geqq \mathfrak{U}$. Hat $\mathfrak{f}_n$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth, so sind beide ihm gleich. Dass umgekehrt im Falle der Gleichheit dieser Grenzen ihr gemeinsamer Werth der endliche Grenzwerth von $\mathfrak{f}_n$ bei $\lim n = +\infty$ ist, ergiebt sich aus den Ungleichungen (8) und (9) unmittelbar.

Beispiel. Der Ausdruck

$$2 + (-1)^n + 1/n$$

hat bei $\lim n = +\infty$ 3 zur obern, 1 zur untern Grenze.

17. Unvollständige Decimalzahlen. In numerischen Rechnungen wird eine irrationale Zahl $\mathfrak{a}$ durch einen rationalen Näherungswerth α vertreten. Aehnliches gilt von einer rationalen Zahl, welche nicht genau bekannt ist. — Setzt man

$$\mathfrak{a} = \alpha + \mathfrak{r}$$

und nimmt an, dass zwei rationale Zahlen ϱ, σ bekannt seien, zwischen denen $\mathfrak{r}$ liegt und zwar so, dass

$$\varrho < \mathfrak{r} < \sigma$$

ist, so hat man

$$\alpha + \varrho < \mathfrak{a} < \alpha + \sigma.$$

$\mathfrak{r}$ heisst der Fehler des Näherungswerthes α und zwar sein absoluter, im Gegensatze zu seinem relativen Fehler, worunter man den Betrag

des Quotienten $\mathfrak{r} : \alpha$ versteht. Je kleiner der letztere ist, um so genauer heisst der Näherungswerth. — Ersetzt man den Näherungswerth α durch den Werth $\alpha + \delta$ (δ rational), dessen Fehler $\mathfrak{r}'$ sei, so hat man

$$\mathfrak{a} = \alpha + \mathfrak{r} = \alpha + \delta + \mathfrak{r}', \quad \text{folglich} \quad \mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \delta.$$

Der Fehler $\mathfrak{r}'$ liegt somit zwischen den Grenzen $\varrho - \delta$ und $\sigma - \delta$. Der Fehler des Werthes $\alpha + \frac{1}{2}(\sigma + \varrho)$ liegt demnach zwischen $-\frac{1}{2}(\sigma - \varrho)$ und $\frac{1}{2}(\sigma - \varrho)$, welche Zahl kleiner ist als der grössere unter den Beträgen von ϱ und σ. Gewöhnlich denkt man sich α als eine endliche Decimalzahl von m Stellen d. i.

$$\alpha = a_0 10^p + a_1 10^{p-1} + \cdots + a_{m-1} 10^{p-m+1},$$

worin $p \gtreqless 0$ sein kann (vgl. S. 86). ϱ σ werden in Theilen der Einheit der letzten hier erscheinenden Ordnung 10^{p-m+1} ausgedrückt. Man nimmt entweder

$$0 < \mathfrak{r} < 10^{p-m+1} \quad \text{neben} \quad 0 > \mathfrak{r} > -10^{p-m+1}$$

oder

$$-\tfrac{1}{2}10^{p-m+1} < \mathfrak{r} < \tfrac{1}{2}10^{p-m+1}. \tag{a}$$

Zumeist werden die letzteren Grenzen gebraucht. α enthält, wenn

$$0 < \mathfrak{r} < 10^{p-m+1},$$

bis zu der Ordnung 10^{p-m+1} einschliesslich die nämlichen Ziffern wie $\mathfrak{a}$; wenn aber

$$0 > \mathfrak{r} > -10^{p-m+1},$$

so ist in α die Ziffer von der Ordnung 10^{p-m+1} um Eins grösser als in $\mathfrak{a}$.[1]) Beim Gebrauche der Fehlergrenzen (a) ist die letzte Stelle des Näherungswerthes α unsicher. Sie stimmt nämlich nur dann mit der Ziffer von der Ordnung 10^{p-m+1} in $\mathfrak{a}$ überein, wenn der Fehler $\mathfrak{r}$ positiv ist; ist er aber negativ, so ist sie um 1 zu gross. Diese Einheit heisst die Correctur. Um die beiden Fälle zu unterscheiden, deutet man durch einen unter die letzte Ziffer von α ge-

---

1) Die Richtigkeit dieser Behauptungen ergiebt sich auf folgende Weise. Bezeichnet α' die von den Ziffern von $\mathfrak{a}$ bis zur Ordnung 10^{p-m+1} einschliesslich gebildete Zahl, so dass

$$\mathfrak{a} = \alpha' + \mathfrak{r}' \qquad (0 < \mathfrak{r}' < 10^{p-m+1})$$

ist, so haben wir $\alpha + \mathfrak{r} = \alpha' + \mathfrak{r}'$, also $\alpha - \alpha' = \mathfrak{r}' - \mathfrak{r}$. Im ersten Falle ist demnach

$-10^{p-m+1} < \alpha - \alpha' < 10^{p-m+1}$, im zweiten $0 < \alpha - \alpha' < 2 \cdot 10^{p-m+1}$, also beziehungsweise

$$-1 < \frac{\alpha - \alpha'}{10^{p-m+1}} < 1 \qquad 0 < \frac{\alpha - \alpha'}{10^{p-m+1}} < 2.$$

Nun ist $(\alpha - \alpha') : 10^{p-m+1}$ eine ganze Zahl, daher ist im ersten Falle $\alpha - \alpha' = 0$, im zweiten $(\alpha - \alpha') : 10^{p-m+1} = 1$ d. i. $\alpha = \alpha' + 10^{p-m+1}$.

setzten Strich u. dgl. an, dass α zu gross sei. So besagt z. B. $\alpha' = 0{,}17$, dass der Fehler von α' zwischen 0 und 0,005; $\alpha'' = 0{,}1\underline{7}$, dass der von α'' zwischen $-0{,}005$ und 0 liegt. Will man solche Angaben auch für eine Rechnung verwerthen, so addirt man zu jeder Zahl, deren letzte Ziffer nicht unterstrichen ist, $\frac{1}{4}10^{p-m+1}$ und zieht von jeder, in der sie unterstrichen ist, $-\frac{1}{4}10^{p-m+1}$ ab. Der Fehler der so erhaltenen Näherungswerthe liegt zwischen $-\frac{1}{4}10^{p-m+1}$ und $\frac{1}{4}10^{p-m+1}$. Man würde demnach statt α' 0,1725, statt α'' 0,1675 gebrauchen.[1]

Setzt man $\alpha = 10^{p-m+1}\mathsf{A}$, so dass A die m-ziffrige ganze Zahl

$$a_0 10^{m-1} + a_1 10^{m-2} + \cdots + a_{m-1}$$

bedeutet, so erscheint der relative Fehler des Näherungswerthes α kleiner als $1:\mathsf{A}$ oder $1:2\mathsf{A}$, je nachdem eines der beiden ersten Paare von Fehlergrenzen oder das Paar (a) zu Grunde gelegt wird. Bei diesen Annahmen der Fehlergrenzen ist demnach der Näherungswerth α um so genauer, je grösser die Zahl A ist.

Hieran würde sich die Ermittelung von Fehlergrenzen für die Ergebnisse der mit unvollständigen Decimalzahlen ausgeführten vier Rechnungsarten schliessen.[2] Wir gehen jedoch nicht näher darauf ein, sondern beschränken uns darauf, die ferner liegenden Sätze unter die Uebungen am Schlusse des Abschnittes aufzunehmen.

18. Die Verhältnisse der relativen Strecken als reelle Zahlen. — Die relativen Strecken auf der Geraden XX' (Fig. II, S. 82) seien wie in VI. 11 mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ $\cdots$ bezeichnet. Unter der Voraussetzung, dass einer positiven Strecke $OE = \mathsf{E}$ die Zahl 1 und einer jeden zu E commensurabeln Strecke $\mathfrak{A}$

---

1) Wie Gauss (W. III, S. 242) berichtet, liess v. Prasse in seinen logarithmischen Tafeln (1810) die letzte Ziffer eines jeden Logarithmen, wenn sie vergrössert worden war, mit einer anderen Schrift setzen. Gauss bemerkt auch, dass diese Einrichtung dazu dienen kann, die Genauigkeit der Rechnung zu verdoppeln; empfiehlt sie und auch die von Babbage zu demselben Zwecke getroffene Einrichtung jedoch nicht, wenn man Logarithmentafeln von mehr Stellen zur Hand hat. Wie man eine solche Verbesserung der Näherungswerthe bei logarithmischen Rechnungen verwerthen kann, zeigt Gernerth in seinen fünfstelligen g. Logarithmen (1866).

2) Hinsichtlich der Theorie der „numerischen Annäherungen" verweisen wir auf Baltzer's Elemente der Math. I. Gem. Arith. § 18, die ausführlichen Darstellungen von Vieille (Théorie gén. des approximations num. 2. éd. 1854), Ruchonnet (Élémens de calcul approximativ 4. éd. 1887), A. Kuckuck, Das Rechnen mit decimalen Zahlen, Berlin 1872, M. Glöser, Das abgekürzte Rechnen in Decimalbrüchen (Programm der Realschule zu Teschen 1874/75) u. A., endlich auf die Lehrbücher der Arithmetik von J. Bertrand und A. Serret und namentlich auf F. Hočevar, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Wien 1901, und die vor kurzem erschienenen: „Vorlesungen über numerisches Rechnen" von J. Lüroth.

$$\mathfrak{A} = \pm \frac{a}{b} \mathsf{E}$$

die Zahl $\pm a:b$ zugeordnet wird, bestehen die folgenden beiden Sätze.

1. Satz. „J e d e r z u E n i c h t c o m m e n s u r a b e l e n S t r e c k e $\mathfrak{B}$ e n t s p r i c h t e i n e u n d n u r e i n e i r r a t i o n a l e Z a h l $\mathfrak{b}$. Bedeuten $\alpha_1 \mathsf{E}$ und $\alpha_2 \mathsf{E}$ zwei zu E commensurabele Strecken, von denen die erste kleiner, die zweite grösser als $\mathfrak{A}$ ist, so ist $\alpha_1 < \mathfrak{b}$ und $\alpha_2 > \mathfrak{b}$. $\mathfrak{b}$ heisst die Maasszahl der Strecke $\mathfrak{B}$ in Bezug auf die Einheit E. $\mathfrak{B}$ wird mit $\mathfrak{b}\mathsf{E}$ bezeichnet, was nicht als Product anzusehen und „$\mathfrak{b}$ an E“ zu lesen ist. Die Zahl $\mathfrak{b}$ hat das nämliche Vorzeichen, wie die Strecke $\mathfrak{B}$. — Der grösseren Strecke entspricht die grössere Zahl.“

B e w e i s. $\mathfrak{B}$ liegt zwischen zwei Strecken $c_0 \mathsf{E}$ und $(c_0 + 1)\mathsf{E}$, worin c_0 eine ganze Zahl ist. Es giebt ferner eine bestimmte Ziffer c_1 $(0 \leqq c_1 \leqq e - 1)$, so dass

$$\left(c_0 + \frac{c_1}{e}\right)\mathsf{E} < \mathfrak{B} < \left(c_0 + \frac{c_1 + 1}{e}\right)\mathsf{E}$$

ist. U. s. f. Auf diese Weise gelangt man zu einer unbegrenzten Reihe von Ziffern $c_1, c_2 \cdots$, welche die Eigenschaft hat, dass nach der Bezeichnung von Nr. 2

$$S_n \mathsf{E} < \mathfrak{B} < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)\mathsf{E}$$

ist, wie gross der Zeiger n auch sein mag. Die Zahl $(S_n) = \mathfrak{b}$ wird der Strecke $\mathfrak{B}$ zugeordnet. Bedeutet nun α_1 eine solche rationale Zahl, dass $\alpha_1 \mathsf{E} < \mathfrak{B}$ ist, so hat man zufolge der letzten Ungleichungen

$$\alpha_1 \mathsf{E} < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)\mathsf{E} \quad \text{d. i.} \quad \alpha_1 < S_n + \frac{1}{e^n}\cdot$$

Lässt man hier n ins Unendliche wachsen, so findet man, dass $\alpha_1 \leqq \mathfrak{b}$ sein muss. Das Zeichen $=$ kann hier nicht stehen; denn wollte man annehmen, dass $\mathfrak{b}$ gleich sei einer der Zahlen α_1, so kann man doch nach dem 11. Satze in V. 2 eine andere rationale Zahl α_1', grösser als α_1, so bestimmen, dass $\alpha_1 \mathsf{E} < \alpha_1' \mathsf{E} < \mathfrak{B}$ ist; es müsste demnach, da auch $\alpha_1' \leqq \mathfrak{b}$ ist, entgegen unserer Annahme $\alpha_1' \leqq \alpha_1$ sein. Wir finden demnach, dass neben $\alpha_1 \mathsf{E} < \mathfrak{B}$ stets $\alpha_1 < \mathfrak{b}$ ist. Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dass wenn für eine Rationalzahl α_2 $\alpha_2 \mathsf{E} > \mathfrak{B}$ ist, stets $\alpha_2 > \mathfrak{b}$ sein muss. Jede Rationalzahl gehört entweder zu den Zahlen α_1 oder zu den Zahlen α_2; es ist mithin die Zahl $\mathfrak{b}$ von jeder Rationalzahl verschieden, daher nothwendig eine irrationale Zahl. — Ist die Strecke $\mathfrak{B} > \mathfrak{B}'$, so giebt es nach dem Satze 11) S. 105 solche rationale Zahlen α_1, dass $\mathfrak{B} > \alpha_1 \mathsf{E} > \mathfrak{B}'$ ist. Wir haben daher, wenn $\mathfrak{b}'$ die Maasszahl der Strecke $\mathfrak{B}'$ ist, $\mathfrak{b} > \alpha_1 > \mathfrak{b}'$, also $\mathfrak{b} > \mathfrak{b}'$.

2. Satz. „J e d e r i r r a t i o n a l e n Z a h l $(\psi_n) = \mathfrak{b}$ e n t s p r i c h t e i n e u n d n u r e i n e S t r e c k e $\mathfrak{B}$, kleiner als alle Strecken $\alpha_1 \mathsf{E}$ und grösser

als alle Strecken $\alpha_2 \mathsf{E}$, wenn α_1 irgend eine rationale Zahl kleiner, α_2 irgend eine grösser als $\mathfrak{b}$ bezeichnet. Der grösseren Zahl entspricht die grössere Strecke."

Der Satz folgt aus der Stetigkeit des Streckensystemes. Dürfen wir der Zahl $\mathfrak{b}$ keine Strecke zuordnen, so können wir im Systeme der relativen Strecken eine Lücke nachweisen. Wir zerschneiden dasselbe in folgender Weise. Zur ersten Gruppe rechnen wir die zu E commensurabeln Strecken $\alpha_1 \mathsf{E}$, wo die Rationalzahl α_1 kleiner als $\mathfrak{b}$ ist, und eine jede zu E incommensurable Strecke $\mathfrak{C}_1$, welche kleiner ist als eine von den soeben erwähnten Strecken $\alpha_1 \mathsf{E}$. Der Strecke $\mathfrak{C}_1$ entspricht nach dem 1. Satze eine irrationale Zahl $\mathfrak{c}_1$ und zwar ist dieselbe kleiner als eine gewisse Rationalzahl α_1, welche kleiner als $\mathfrak{b}$ ist, folglich selbst kleiner als $\mathfrak{b}$. Die zweite Gruppe bestehe aus den zu E commensurabeln Strecken $\alpha_2 \mathsf{E}$, wo die rationale Zahl α_2 grösser als $\mathfrak{b}$ ist und allen zu E incommensurabeln Strecken $\mathfrak{C}_2$, welche grösser sind als eine der Strecken $\alpha_2 \mathsf{E}$. Man darf $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{c}_2 \mathsf{E}$ setzen, wo $\mathfrak{c}_2$ eine irrationale Zahl grösser als $\mathfrak{b}$ bezeichnet. Da nun nach S. 154 zwischen jeder reellen Zahl, welche kleiner als $\mathfrak{b}$ ist, und $\mathfrak{b}$ rationale Zahlen liegen, so giebt es in der ersten Gruppe keine grösste Strecke. Aus demselben Grunde enthält die zweite Gruppe keine kleinste Strecke. Der in Rede stehende Schnitt des Streckensystems zeigt mithin eine Lücke desselben an. Da aber eine Lücke darin nicht vorkommen darf, so muss es eine Strecke $\mathfrak{B} = \mathfrak{b} \mathsf{E}$ geben. — Ist die Zahl $\mathfrak{b} > \mathfrak{b}'$, so giebt es, wie soeben bemerkt wurde, Rationalzahlen α_1 zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$. Bedeutet $\mathfrak{B}'$ die zur Zahl $\mathfrak{b}'$ gehörige Strecke, so haben wir demnach neben $\mathfrak{B} > \alpha_1 \mathsf{E}$ $\alpha_1 \mathsf{E} > \mathfrak{B}'$; folglich ist $\mathfrak{B} > \mathfrak{B}'$.

Wir haben bisher einer positiven, sonst willkürlichen Strecke E der Geraden XX' die Zahl $+1$ zugeordnet, können ihr aber auch die negative Strecke $-\mathsf{E}$ entsprechen lassen. Dann ändern die Maasszahlen der Strecken bloss sämmtlich ihr Vorzeichen.

Nunmehr gehört zu jedem Streckenverhältniss $\mathfrak{A} : \mathfrak{B}$ eine reelle Zahl, nämlich die Maasszahl des Vordergliedes $\mathfrak{A}$ in Bezug auf das Hinterglied $\mathfrak{B}$. Und zwar entsprechen je zweien nach VI. 11 gleichen Verhältnissen gleiche Zahlen. Sind z. B. die Verhältnisse zweier Paare von absoluten Strecken $A : B$ und $A' : B'$ im Sinne von Euclid einander gleich (S. 122) und es bedeuten α_1 α_2 irgend zwei absolute rationale Zahlen von der Art, dass $\alpha_1 B < A < \alpha_2 B$ ist, so hat man auch $\alpha_1 B' < A' < \alpha_2 B'$. Entsprechen nun den genannten Verhältnissen bezw. die Zahlen $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a}'$, so ist nach dem 1. Satze neben

$$\alpha_1 < \mathfrak{a} < \alpha_2 \quad \text{stets} \quad \alpha_1 < \mathfrak{a}' < \alpha_2,$$

somit nach dem 1. Satze S. 156 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$.

Jetzt lassen wir die in VI. 11 bezw. 9 eingeführten Verhältnisszahlen $\mathfrak{B} : \mathsf{E}$ (wofür, wenn man sich die Einheit E ein für alle Male

festgesetzt denkt, einfach $\mathfrak{B}$ geschrieben wird) auch im Falle, dass die Strecken $\mathfrak{B}$ und E incommensurabel sind, mit den Maasszahlen der Strecken $\mathfrak{B}$ bezüglich der Einheit E zusammenfallen. Ist O der Nullpunkt der Zahlenlinie XX', so heisst die Maasszahl der Strecke OA gegenüber E die Abscisse des Punktes A.

Um die Gleichsetzung der relativen Verhältnisszahlen und der reellen Zahlen vollständig zu rechtfertigen, ist aber noch zu zeigen, dass den Ergebnissen der in VI. 11 erklärten Verknüpfungen der Verhältnisse diejenigen reellen Zahlen zugeordnet sind, welche aus den entsprechenden Verknüpfungen der zu diesen Verhältnissen gehörigen reellen Zahlen hervorgehen. Dass dem in der That so sei, ergiebt sich aus dem nachstehenden 4. und 5. Satze, welche ihrerseits aus dem 3. folgen.

3. Satz. „Es sei wieder $(\psi_n) = \mathfrak{b}$. Hat man eine Strecke $\mathfrak{B}$ gefunden derart, dass zu jeder positiven rationalen Zahl ε eine andere μ so gehört, dass für alle Werthe von n grösser als μ

$$(\psi_n - \varepsilon)\,\mathsf{E} < \mathfrak{B} < (\psi_n + \varepsilon)\,\mathsf{E} \tag{a}$$

ist, so ist $\mathfrak{B}$ die der Zahl $\mathfrak{b}$ bei der Einheit E entsprechende Strecke."

In der That lässt sich leicht zeigen, dass wenn α_1 irgend eine Rationalzahl kleiner als $\mathfrak{b}$ bedeutet, $\alpha_1\mathsf{E} < \mathfrak{B}$ und, wenn α_2 irgend eine grösser als $\mathfrak{b}$, $\alpha_2\mathsf{E} > \mathfrak{B}$ ist. Ist nämlich $\alpha_1 < \mathfrak{b}$, so giebt es zwei positive Rationalzahlen ϱ μ' von der Beschaffenheit, dass neben $n > \mu'$ $\psi_n - \alpha_1 > \varrho$ ist (S. 151). Also ist neben $n > \mu'$ $\psi_n - \varrho > \alpha_1$, mithin nach V. 2 $(\psi_n - \varrho)\,\mathsf{E} > \alpha_1\mathsf{E}$. Nimmt man in (a) $\varepsilon = \varrho$ und $\mu = \mu'$, so erkennt man, dass $\mathfrak{B} > \alpha_1\mathsf{E}$ ist. Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dass neben $\alpha_2 > \mathfrak{b}$ $\alpha_2\mathsf{E} > \mathfrak{B}$ ist.

4. Satz. „Sind $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ die Maasszahlen der Strecken $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ bezüglich der Einheit E, so ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ die Maasszahl der Strecke $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$." D. h. es besteht neben der Formel

$$(\mathfrak{A} : \mathsf{E}) + (\mathfrak{B} : \mathsf{E}) = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) : \mathsf{E}$$

die folgende

$$\mathfrak{a}\mathsf{E} + \mathfrak{b}\mathsf{E} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\,\mathsf{E}. \tag{b}$$

Beweis. Es sei $\mathfrak{a} = (\varphi_n)$, $\mathfrak{b} = (\psi_n)$; alsdann entspricht jedem rationalen $\varepsilon > 0$ ein $\mu > 0$ so, dass neben $n > \mu$

$$\varphi_n - \varepsilon < \mathfrak{a} < \varphi_n + \varepsilon \qquad \psi_n - \varepsilon < \mathfrak{b} < \psi_n + \varepsilon \tag{c}$$

ist. Demnach ist nach dem 2. Satze

$$(\varphi_n - \varepsilon)\,\mathsf{E} < \mathfrak{A} < (\varphi_n + \varepsilon)\,\mathsf{E} \qquad (\psi_n - \varepsilon)\,\mathsf{E} < \mathfrak{B} < (\psi_n + \varepsilon)\,\mathsf{E}, \tag{d}$$

somit ist vermöge des Satzes 4) S. 118

$$(\varphi_n + \psi_n - 2\varepsilon)\,\mathsf{E} < \mathfrak{A} + \mathfrak{B} < (\varphi_n + \psi_n + 2\varepsilon)\,\mathsf{E}.$$

Nun ist $(\varphi_n + \psi_n) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, 2ε bedeutet jede beliebige positive rationale Zahl, also entspricht nach dem 3. Satze der Zahl $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ die Strecke $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$.

Besondere Fälle der Gleichung (b) bilden die Formeln

$$AB + BA = 0 \qquad AB + BC = AC, \tag{d*}$$

in dem Sinne zu nehmen, dass AB BC AC die Maasszahlen dieser Strecken bezüglich einer Einheit bedeuten.

5. Satz. „Ist $\mathfrak{a} = (\varphi_n)$ die Maasszahl der Strecke $\mathfrak{A}$ bezüglich der Einheit $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b} = (\psi_n)$ die der Strecke $\mathfrak{B}$ bezüglich E, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ die Maasszahl von $\mathfrak{A}$ in Bezug auf E." D. h. ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B} = \mathfrak{b}\mathsf{E}$, so ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathsf{E}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathsf{E}. \tag{e}$$

Diese Formel entspricht der Productformel in VI. 11

$$\mathfrak{A} : \mathsf{E} = (\mathfrak{A} : \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{B} : \mathsf{E}). \tag{e*}$$

Beweis. Wir nehmen zunächst die beiden Zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als positiv an. Alsdann dürfen wir auch $\varphi_n - \varepsilon$ und $\varphi_n + \varepsilon$ in (c) als positive Rationalzahlen betrachten. Es folgt daher nach V. 2 aus der letzteren der in (d) vereinigten Ungleichungen, dass wenn $n > \mu$ ist,

$$(\varphi_n - \varepsilon)(\psi_n - \varepsilon)\mathsf{E} < (\varphi_n - \varepsilon)\mathfrak{B} \tag{f}$$

ist. Nun ist zufolge der Voraussetzung neben $n > \mu$

$$(\varphi_n - \varepsilon)\mathfrak{B} < \mathfrak{A} < (\varphi_n + \varepsilon)\mathfrak{B},$$

somit nach (f)

$$(\varphi_n - \varepsilon)(\psi_n - \varepsilon)\mathsf{E} < \mathfrak{A}$$

und daher natürlich auch

$$[\varphi_n\psi_n - (\varphi_n + \psi_n)\varepsilon - \varepsilon^2]\mathsf{E} < \mathfrak{A}.$$

Auf ähnliche Art schliesst man, dass für $n > \mu$

$$\mathfrak{A} < (\varphi_n + \varepsilon)(\psi_n + \varepsilon)\mathsf{E}$$

ist. Wir dürfen nun nach Nr. 5, 1. Satz annehmen, dass sämmtliche Werthe φ_n und ψ_n kleiner sind als eine feste positive Rationalzahl $\varkappa$. Daher folgt aus den beiden letzten Ungleichungen für $n > \mu$

$$(\varphi_n\psi_n - 2\varkappa\varepsilon - \varepsilon^2)\mathsf{E} < \mathfrak{A} < (\varphi_n\psi_n + 2\varkappa\varepsilon + \varepsilon^2)\mathsf{E}.$$

$(\varphi_n\psi_n)$ ist gleich $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ und $2\varkappa\varepsilon + \varepsilon^2$ kann kleiner als jede, beliebige positive Rationalzahl ε' sein.[1]) Daraus schliessen wir nach dem 3. Satze, dass zur Strecke $\mathfrak{A}$ bei der Einheit E die Zahl $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ gehört.

Ist von den Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ mindestens eine negativ, so hat man nur noch nachzusehen, ob das Product $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und die Strecke $\mathfrak{A}$ das nämliche Vorzeichen haben. Das ist wirklich stets der Fall. Denn wenn z. B. $\mathfrak{a} < 0$ $\mathfrak{b} < 0$ ist, so sind die Strecken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ entgegengesetzt bezeichnet und $\mathfrak{B}$ eine negative Strecke; folglich ist $\mathfrak{A}$ eine positive. Das Product $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ist aber auch positiv. Die Formel (e) gilt somit allgemein.

---

1) Denkt man sich von vorneherein $\varepsilon' < 2\varkappa + 1$, so muss $\varepsilon < 1$, somit $\varepsilon^2 < \varepsilon$ sein. Es genügt also ε so anzunehmen, dass $(2\varkappa + 1)\varepsilon < \varepsilon'$ ist.

Denken wir uns die Formel (e) in die Form (e*) umgeschrieben, so ersehen wir daraus, dass

$$\mathfrak{A}:\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}:\mathsf{E})/(\mathfrak{B}:\mathsf{E}) \tag{g}$$

ist. Die Maasszahl der Strecke $\mathfrak{A}$ in Bezug auf die Einheit $\mathfrak{B}$ ist also gleich dem Quotienten der Maasszahlen der Strecken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in Bezug auf die Einheit E. Durch diesen Satz ist die Frage gelöst, welche Zahl einer Strecke $\mathfrak{A}$ entspricht, wenn man von der ursprünglichen Einheit E zu einer andern $\mathfrak{B}$ übergeht.

Aus der Gleichung (g) erkennt man, dass an die Stelle einer Proportion aus vier Strecken (d. i. der Gleichung zwischen zwei Streckenverhältnissen) die Gleichung zwischen den Quotienten ihrer Maasszahlen in Bezug auf die nämliche Einheit tritt. Bedeuten $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ $\mathfrak{d}$ die Maasszahlen der Strecken $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{D}$ in Bezug auf die Einheit E, so haben wir neben der Proportion

$$\mathfrak{A}:\mathfrak{B} = \mathfrak{C}:\mathfrak{D}$$

die Gleichung

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{b} = \mathfrak{c}/\mathfrak{d}. \tag{h}$$

Wenn man, wie es heutzutage selbst in der Geometrie geschieht, an Stelle der Strecken ihre Maasszahlen in Bezug auf *eine* Einheit setzt, so sind die in VI. 4—7 vorgetragenen Sätze über die Verhältnisse und Proportionen ganz überflüssig, da die ihnen entsprechenden algebraischen Umformungen sich jeder Zeit *von selbst* darbieten. So folgt z. B. aus (h) unmittelbar, dass

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} + 1 = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}} + 1 \quad \text{d. i.} \quad \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}}$$

ist (S. 126, 6. Satz). Dagegen war die im VI. Abschnitte auseinandergesetzte Lehre der alten Geometrie als Ersatz für die der damaligen Arithmetik fehlenden irrationalen Zahlen unentbehrlich.

Uebungen zum VII. Abschnitt.

1) *Vergleichung der reellen Zahlen untereinander nach Weierstrass.* Stellt man den Satz auf S. 163 Z. 3, natürlich beschränkt auf eine convergente Function φ_n von rationalem Werthe, an die Spitze der in Nr. 5 und 6 beginnenden Entwickelung, so darf man zunächst behaupten, dass *in einer irrationalen Zahl* (φ_n) *die Einheit, sowie jeder Stammbruch* $1:q$ *eine bestimmte Anzahl von Malen, nämlich* h*-mal, enthalten sei.* Alsdann sagen wir, *zwei irrationale Zahlen* (φ_n), (ψ_n) *seien einander gleich, wenn die Einheit, sowie ein jeder Stammbruch in beiden gleich oft enthalten ist.* Ferner: Es soll (φ_n) grösser als (ψ_n) sein, wenn wenigstens ein Stammbruch $1:q$ in (φ_n) öfter enthalten ist als in (ψ_n). U. s. w. Diese Erklärungen sind mit den in Nr. 6 aufgestellten gleichbedeutend. Insbesondere besteht der Satz:

Satz. „Genügen die erzeugenden Functionen φ_n, ψ_n zweier irrationalen Zahlen der Bedingung, dass

$$\lim_{n=+\infty} (\varphi_n - \psi_n) = 0 \tag{a}$$

ist, so ist jeder Stammbruch $1:q$ in beiden Zahlen gleich oft enthalten. Und umgekehrt: Ist in den irrationalen Zahlen (φ_n), (ψ_n) jeder Stammbruch gleich oft enthalten, so gilt die Formel (a)."

Der erste Theil des Satzes wird so gezeigt. Ist $1:q$ in (φ_n) h-mal, in (ψ_n) k-mal enthalten, so giebt es eine solche positive Zahl M, dass wenn $n > M$ ist,

$$\frac{h}{q} < \varphi_n < \frac{h+1}{q} \qquad \frac{k}{q} < \psi_n < \frac{k+1}{q}$$

ist. Anderseits kann man zufolge der Beziehung (a) M auch so wählen, dass neben $n > M$

$$\varphi_n < \psi_n + \frac{1}{q} \qquad \psi_n < \varphi_n + \frac{1}{q}$$

ist. Daher ist

$$\frac{h}{q} < \frac{k+2}{q} \qquad \frac{k}{q} < \frac{h+2}{q} \quad \text{d. i.} \quad h \leqq k+1, \ k \leqq h+1.$$

Um ersichtlich zu machen, dass hier die Gleichungen $h = k + 1$ und $k = h + 1$ nicht zutreffen, müssen wir die Entwickelung von Nr. 13 bis zum Satze auf S. 162 Z. 11 v. u. weitergeführt denken. Lassen wir dort q an die Stelle von e treten und nehmen an, es sei $h = k + 1$, so finden wir, dass zu jeder natürlichen Zahl p eine andere m_p so gehört, dass wenn nur $n > m_p$ ist,

$$\varphi_n > \frac{k+1}{q} + \frac{c_2}{q^2} + \cdots + \frac{c_p}{q^p}$$

$$\psi_n < \frac{k}{q} + \frac{d_2}{q^2} + \cdots + \frac{d_p + 1}{q^p}$$

ist, worin $c_2 \cdots c_q$, $d_2 \cdots d_q$ Ziffern sind, also nur die Werthe 0 bis $q - 1$ annehmen können. Daraus folgt dass

$$\varphi_n - \psi_n > \frac{1}{q} + \frac{c_2 - d_2}{q^2} + \cdots + \frac{c_p - d_p - 1}{q^p} \tag{b}$$

ist. Nehmen wir an, es sei $c_p - d_p > -(q-1)$ also $c_p - d_p = g - (q-1)$, worin g eine natürliche Zahl ist, so ergiebt sich aus (b), dass wenn $n > m_p$,

$$\varphi_n - \psi_n > \frac{1}{q} - \frac{q-1}{q^2} - \cdots - \frac{q-1}{q^{p-1}} + \frac{g-q}{q^p} = \frac{g}{q^p}.$$

Dies würde der Formel (a) widersprechen. Wollte man aber annehmen, dass für jeden der Werthe $r = 2, 3 \cdots$ $c_r - d_r = -q + 1$ d. i. $d_r = c_r + (q-1)$ also $c_r = 0$ $d_r = q - 1$ wäre, so müssten φ_n und ψ_n beide bei $\lim n = +\infty$ den rationalen Grenzwerth $(k+1):q$ haben, was hier ausgeschlossen ist. Also kann h nicht gleich $k + 1$ sein. Ebensowenig kann $k = h + 1$ sein. Also muss $h = k$ sein, w. z. b. w.

Der zweite Theil des obigen Satzes folgt unmittelbar aus der Bemerkung, dass wenn nur $n > M$ ist, alsdann

$$\frac{h}{q} < \varphi_n < \frac{h+1}{q} \quad \text{und} \quad \frac{h}{q} < \psi_n < \frac{h+1}{q}, \quad \text{also} \quad |\varphi_n - \psi_n| < \frac{1}{q} \text{ ist.}$$

2) Man beweise die in Nr. 4 und 5 des VI. Abschnittes gegebenen Sätze unter der Voraussetzung, dass die dort erscheinenden Buchstaben $A, B \cdots$ die absoluten Verhältnisszahlen der bezüglichen Grössen gegenüber einer Einheit E bedeuten und an Stelle der Euclid'schen Verhältnisse $A:B \cdots$ die Quotienten der betreffenden Verhältnisszahlen treten.

Die Gleichungen unter ihnen gelten auch für die relativen Verhältnisszahlen, die Ungleichungen nur unter gewissen Beschränkungen über diese Zahlen.

3) Sind n einander gleiche Brüche

$$\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1} = \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{b}_2} = \cdots = \frac{\mathfrak{a}_n}{\mathfrak{b}_n}$$

vorgelegt, so sind sie dem Bruche

$$\frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{w}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n \mathfrak{w}_n}{\mathfrak{b}_1 \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{b}_2 \mathfrak{w}_2 + \cdots + \mathfrak{b}_n \mathfrak{w}_n}$$

gleich, wofern nur die reellen Zahlen $\mathfrak{w}_1 \cdots \mathfrak{w}_n$ so gewählt sind, dass sein Nenner nicht verschwindet. — Sind diese Zahlen aber so gewählt, dass

$$\mathfrak{b}_1 \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{b}_2 \mathfrak{w}_2 + \cdots + \mathfrak{b}_n \mathfrak{w}_n = 0$$

ist, so muss auch

$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{w}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n \mathfrak{w}_n = 0$$

sein.

4) Erster Mittelwerthsatz. „Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n$ beliebige, jedoch nicht sämmtlich gleiche, $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \cdots \mathfrak{b}_n$ dagegen gleichbezeichnete reelle Zahlen, so liegt der Bruch

$$\frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n \mathfrak{b}_n}{\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \cdots + \mathfrak{b}_n}$$

zwischen der (oder den) kleinsten und grössten der Zahlen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n$." — Beweis leicht mittelst der Beziehungen $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{a}_1 \leqq \mathfrak{A}' \cdots$ (worin $\mathfrak{A}$ die kleinste, $\mathfrak{A}'$ die grösste der Zahlen $\mathfrak{a}_r$ bedeutet), welche beziehentlich mit $\mathfrak{b}_1 \cdots$ multiplicirt und dann addirt werden.

5) Zweiter Mittelwerthsatz. „Setzt man

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_r = \mathfrak{s}_r \qquad (r = 1, 2 \cdots n)$$

und nimmt an, dass die Zahlen $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \cdots \mathfrak{b}_n$ bei steigendem Stellenzeiger r entweder nicht abnehmen oder nicht zunehmen, so hat man

$$\sum_1^n {}_r\, \mathfrak{a}_r \mathfrak{b}_r = \mathfrak{s}_n \mathfrak{b}_n + (\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_n)\, \mathfrak{M},$$

wo $\mathfrak{M}$ einen Mittelwerth zwischen der kleinsten und der grössten der Partialsummen $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \cdots \mathfrak{s}_{n-1}$ bedeutet."

Beweis. Man setze $\mathfrak{a}_r = \mathfrak{s}_r - \mathfrak{s}_{r-1}$ und wende mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Unterschiede $\mathfrak{b}_2 - \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{b}_2 \cdots$ sämmtlich gleichbezeichnet sind, den vorigen Satz an.

6) „Sind $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2$ gleichbezeichnete reelle Zahlen, so ist

$$(1 + \mathfrak{a}_1)(1 + \mathfrak{a}_2) > 1 + \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2.$$

Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n$ $(n \geqq 3)$ gleichbezeichnete reelle Zahlen und ausserdem $1 + \mathfrak{a}_1$, $1 + \mathfrak{a}_2 \cdots 1 + \mathfrak{a}_n$ positiv, so ist

$$(1 + \mathfrak{a}_1)(1 + \mathfrak{a}_2) \cdots (1 + \mathfrak{a}_n) > 1 + \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n.\text{“}$$

Die zweite Ungleichung ist aus der ersten durch den Schluss von n auf $n + 1$ abzuleiten.

7) *Beziehungen unter gewissen Strecken der Zahlengeraden.* Sind $A\ B\ C\ D$ vier beliebige Punkte derselben und bedeuten AB, BC u. s. w. die diesen Strecken nach Festsetzung der Längeneinheit zugehörigen relativen Zahlen, so bestehen folgende Identitäten:

a) $BC = AC - AB$
b) $AB + BC + CA = 0$
c) $AB + BC + CD + DA = 0$
d) $BC \cdot AD + CA \cdot BD + AB \cdot CD = 0$
e) $BC \cdot AD^2 + CA \cdot BD^2 + AB \cdot CD^2 + BC \cdot CA \cdot AB = 0.$

a) b) folgen unmittelbar aus den Formeln (d*) auf S. 176; c) folgt aus b), d) und e) endlich erweisen sich als richtig, wenn man alle darin vorkommenden Strecken durch die Abscissen ihrer Endpunkte ausdrückt, z. B. $BC = OC - OB$.

8) Es sei wie auf S. 170 α ein rationaler Näherungswerth der Irrationalzahl $\mathfrak{a}$, welcher mit Einheiten von der Ordnung 10^k $\left(k \gtreqless 0\right)$ schliesst. Man weiss, dass der Unterschied $\mathfrak{a} - \alpha$ zwischen den rationalen Grenzen

$$\varrho = (r + \varrho')\,10^k \qquad \sigma = (s + \sigma')\,10^k$$

liegt, wobei $r\ s$ ganze Zahlen sind und $0 \leqq \varrho' < 1$, $0 \leqq \sigma' < 1$ ist. Ist $\sigma' = 0$, so ist $s - 1 \geqq r$; ist $\sigma' > 0$, so ist $s \geqq r$. Bedeutet dann α' die von den Ziffern der Zahl $\mathfrak{a}$ bis einschliesslich der Ordnung 10^k gebildete Decimalzahl, so ist $\alpha' - \alpha$ im Falle dass $\sigma' = 0$ ist, eine der Zahlen $r \cdot 10^k$, $(r + 1)\,10^k \cdots (s - 1)\,10^k$, im Falle dass $\sigma' > 0$ ist, eine der Zahlen $r \cdot 10^k$, $(r + 1)\,10^k \cdots s \cdot 10^k$. (Beweis nach der Note auf S. 171.)

9) *Grenzen des Fehlers des durch die übliche abgekürzte Multiplication zweier unvollständigen Decimalzahlen gefundenen Productes gegenüber seinem wahren Werthe.*

Die wahren Werthe zweier positiven Zahlen seien A und B, ihre Näherungswerthe α, β und die Fehler derselben a, b, so dass

$$A = \alpha + a \qquad B = \beta + b \tag{1}$$

ist. Dabei seien α, β wie in IV. 7 beziehungsweise m- und n-ziffrig und zwar

$$\alpha = a_0 10^p + a_1 10^{p-1} + \cdots + a_{m-1} 10^{p-m+1} \qquad \left(p \gtreqless 0\right) \tag{2}$$

$$\beta = b_0 10^q + b_1 10^{q-1} + \cdots + b_{n-1} 10^{q-n+1} \qquad \left(q \gtreqless 0\right). \tag{3}$$

Ferner sei bekannt, dass

$$|a| < \tfrac{1}{2} 10^{p-m+1} \qquad |b| < \tfrac{1}{2} 10^{q-n+1} \tag{4}$$

ist. Vermöge der Formeln (1) hat man

$$AB = (\alpha + a)(\beta + b) = \alpha\beta + \beta a + \alpha b + ab,$$

wobei nach den Formeln (2)—(4)

$$\beta\,|a| < \tfrac{1}{2} 10^{p+q-m-n+2}(b_0 10^{n-1} + b_1 10^{n-2} + \cdots + b_{n-1}) \tag{5}$$
$$\alpha\,|b| < \tfrac{1}{2} 10^{p+q-m-n+2}(a_0 10^{m-1} + a_1 10^{m-2} + \cdots + a_{m-1}) \tag{6}$$

ist. Wenn die n-ziffrige ganze Zahl $b_0 10^{n-1} + \cdots + b_{n-1}$ grösser ist als die m-ziffrige $a_0 10^{m-1} + \cdots + a_{m-1}$, also der Näherungswerth β nach S. 171 genauer ist als α, so ist die rechte Seite in (5) grösser als die in (6). Man wird daher die Rechnung nicht über die Stellen von der Ordnung 10^k $(k = p + q - m + 1)$ ausdehnen. Man bildet demnach das abgekürzte Product P der Zahlen α und β in der üblichen Weise, indem man die weniger genaue Zahl als Multiplicand ansieht und mit der genaueren multiplicirt. Alsdann endet das erste Theilproduct $\alpha b_0 10^q$ genau mit den Einheiten von 10^k.

Der Fehler von P ergiebt sich aus der Formel

$$AB - P = (\alpha + a)B - P = (\alpha B - P) + Ba,$$

Er zerfällt mithin in zwei Theile. Für $B\,|a|$ ist die Fehlergrenze dieselbe, wie für $\beta\,|a|$ in (5), also $\frac{b_0+1}{2} 10^k$.

Der Fehler $|\alpha B - P|$ ist, falls $m < n$ ist, kleiner als $\frac{3m}{2} 10^k$, falls $m = n$ ist, kleiner als $\left(\frac{3m}{2} - 1 + \frac{a_0+1}{2}\right) 10^k$. Dies ergiebt sich leicht dadurch, dass man die Fehler der aufeinanderfolgenden Theilproducte $\alpha b_0 10^q$, $\alpha b_1 10^{q-1} \cdots$ abschätzt. (Dabei sei $n > 2$.)

Sollte $b = 0$ d. i. $B = \beta$ sein, so braucht man im Falle dass $m = n$ ist, als Fehler $|\alpha\beta - P|$ nur $\left(\frac{3m}{2} - 1\right) 10^k$ anzusetzen. Dieser Fehler liegt im Falle dass $m > n$ ist, stets unter $\frac{3n}{2} 10^{p+q-n+1}$, welche Zahl, wenn $m = n - 1$ ist, noch um eine Einheit der genannten Ordnung herabgesetzt werden kann.

10) Grenzen des Fehlers des in der üblichen Weise abgekürzt berechneten Quotienten $\alpha : \beta$ gegenüber dem wahren Quotienten $A : B$. (Nach F. Hočevar, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 1901 S. 79.)

Zunächst bemerken wir, dass nach (1)

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha + a}{\beta + b} = \frac{\alpha}{\beta} + \left(\frac{a}{B} - \frac{\alpha b}{\beta B}\right) \tag{7}$$

ist. Die Grenzen für $|a| : B$ und $\alpha\,|b| : \beta B$ ergeben sich aus denen für

$|a|$ und $|b|$ in (4). Die grössere bestimmt die Stelle, bis zu welcher der Quotient $\alpha:\beta$ abgekürzt zu berechnen ist. Sie sei 10^k. Bezeichnen wir den auf diese Weise erhaltenen Quotienten mit Q, den zugehörigen wahren Divisionsrest mit R, welcher sich aus den vernachlässigten Stellen von α und dem Reste der abgekürzten Division zusammensetzt, und das abgekürzt bis auf Einheiten von der Ordnung 10^{q+k} berechnete Product $Q \times \beta$ (β Multiplicator) mit P, so haben wir

$$\alpha = P + R \qquad (|R| \leqq [\tfrac{1}{2} b_0 + 1]\, 10^{q-k}). \tag{8}$$

Endlich sei

$$Q\beta = P + F. \tag{9}$$

Wir setzen nun

$$\frac{A}{B} - Q = \left(\frac{A}{B} - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{\alpha}{\beta} - Q\right).$$

Den ersten Theil rechts schätzen wir mittelst der Formel (7) ab und hinsichtlich des zweiten bemerken wir, dass zufolge (8) und (9)

$$\frac{\alpha}{\beta} - Q = \frac{\alpha - \beta Q}{\beta} = \frac{R - F}{\beta}$$

ist. Die Grenzen des Fehlers F der Zahl P gegenüber $Q\beta$ werden nach dem in Uebung 9) angeführten Satze ermittelt.

10*) Die Function $\mathfrak{f}_n$ hat bei $\lim n = +\infty$ keinen endlichen Grenzwerth, wenn sie die folgende Bedingung erfüllt: Zu jedem $\mathfrak{e} > 0$ gehört eine positive Zahl $\mathfrak{e}' < \mathfrak{e}$ von der Art, dass jeder Zahl $\mathfrak{m} > 0$ zwei sie überschreitende Werthe der ganzen Zahl n, m und $m + r$, entsprechen, wofür

$$|\mathfrak{f}_{m+r} - \mathfrak{f}_m| \geqq \mathfrak{e}' \quad \text{ist.}$$

11) Der Satz vom Winkelschnitt (vgl. S. 136 Uebung 5)) lautet, wenn man unter AB u. s. w. die Masszahlen der Strecken AB u. s. w. in Bezug auf die nämliche Einheit E versteht: Es ist der Quotient

$$AB/BC = A'B'/B'C'.$$

Er ist in dieser Form zu beweisen, wobei man die Fälle zu unterscheiden hat, ob die Strecken AB, BC commensurabel sind oder nicht.

Die Zahlen der Vielecke.

12) Die absolute Zahl des Rechtecks. „Ordnet man dem Quadrate von der Seite 1 die Zahl 1 und jedem Rechtecke, dessen Grundlinie und Höhe bezw. die rationalen Verhältnisse g, h zur Längeneinheit haben, die Zahl gh zu (IV. 2) und nimmt an, dass jedem Rechtecke eine Zahl und zwar dem grösseren unter zwei Rechtecken von der nämlichen Höhe (V. 5) oder von der nämlichen Grundlinie die grössere Zahl entspreche, so gehört zum Rechtecke, dessen Grundlinie und Höhe bezw. die absoluten Verhältnisse $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ zur Längeneinheit besitzen (Nr. 16), die Zahl $\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{h}$.“ Man betrachte zunächst das Rechteck mit der irrationalen Grundlinie $\mathfrak{g}$ und der rationalen Höhe h. Ist in systematischer Form $\mathfrak{g} = \lim\limits_{n=+\infty} S_n$ (S. 157), so muss die Zahl dieses Rechtecks

bei jedem Werthe der natürlichen Zahl n zwischen $S_n h$ und $\left(S_n + \frac{1}{e^n}\right) h$ liegen; sie ist demnach $\mathfrak{g} \cdot h$. — Der allgemeine Satz ergiebt sich aus diesem besonderen Falle desselben auf ähnliche Weise, indem man Rechtecke von der Grundlinie $\mathfrak{g}$ betrachtet.

Die relative Zahl eines Rechtecks ist schon in IV. 5 erklärt.

NB. Mit Hilfe der Rechteckszahl lässt sich die Zahl einer jeden andern, gerad- oder krummlinig begrenzten, ebenen Fläche durch einen Grenzwerth, nämlich durch ein Doppelintegral erklären (vgl. O. Stolz, Grundzüge der Diff.- u. Integralrechnung III. S. 60, 200). Hieraus folgt unmittelbar der Satz, dass der aus einer endlichen Anzahl von Theilen bestehenden Fläche als Zahl die Summe der Zahlen ihrer Theile zukomme. — Die Aufstellung des soeben erwähnten Grenzwerthes erscheint für die Planimetrie zu umständlich; man versucht lieber, die Flächenzahlen mit der Forderung, dass congruenten Flächen die nämliche Zahl entspreche und der soeben erwähnte Satz über die Zahl einer aus Theilen bestehenden Fläche gelten soll[1]), zu bestimmen. Hierdurch ergeben sich die folgenden Sätze:

13) a) „Die absolute Zahl für ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ muss $\mathfrak{g}\mathfrak{h}/2$ sein." — Das Rechteck mit der Grundlinie $\mathfrak{g}$ und der Höhe $\mathfrak{h}$ zerfällt nämlich durch eine Diagonale in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$; mithin ist das Doppelte der Zahl eines jeden von ihnen $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$.

b) Die absolute Zahl eines Dreieckes mit der Grundlinie $\mathfrak{g}$ und der Höhe $\mathfrak{h}$ muss $\mathfrak{g}\mathfrak{h}/2$ sein." Zwei Fälle, je nachdem die Höhe $\mathfrak{h}$ innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks fällt. Im ersten wird dasselbe durch die Höhe $\mathfrak{h}$ in zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Grundlinien $\mathfrak{g}_1\, \mathfrak{g}_2$, deren Summe $\mathfrak{g}$ ist, zerlegt. Die Zahl des vorgelegten Dreiecks ist demnach

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_1\mathfrak{h} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_2\mathfrak{h} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2)\mathfrak{h} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}\mathfrak{h}. \quad \text{U. s. w.}$$

Zur vollständigen Begründung dieser Zuordnungen gehören noch nachstehende drei Sätze:

c) „Bezeichnet man die Seiten des Dreiecks ABC mit $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ und die ihnen zugehörigen Höhen mit $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}''$, so hat man

$$\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{h} = \mathfrak{g}' \cdot \mathfrak{h}' = \mathfrak{g}'' \cdot \mathfrak{h}''.\text{“}$$

Wird bewiesen durch die Aehnlichkeit gewisser Dreiecke, welche Lehre bei rationeller Darstellung der Planimetrie der Flächenmessung voraufgehen muss.

d) „Bedeutet P einen beliebigen Punkt der Seite BC, so ist die Summe der Zahlen für die Dreiecke ABP, APC gleich der Zahl des Dreiecks ABC."

---

1) Man darf jedoch diesen Satz bloss als ein leitendes Prinzip, nicht etwa als ein Axiom ansehen. Denn im letzteren Falle würde darin stillschweigend die Annahme liegen, dass wie immer auch eine Fläche in Theile zerlegt werden mag, die Summe der Zahlen derselben stets die nämliche ist. Eine solche Annahme ist unzulässig und, wie die folgenden Sätze zeigen, in der That überflüssig.

e) „Ist M ein beliebiger Punkt der Ebene ABC, so ist die Summe der relativen Zahlen der Dreiecke BCM, CAM, ABM gleich der Zahl von ABC.“ [Beweis nach Möbius, Werke I. S. 40.]

Der Kürze halber sind in den beiden letzten Sätzen die relativen Zahlen der bezüglichen Dreiecke benutzt. Man hat also z. B. unter ABC die Zahl $+\frac{\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{h}}{2}$ oder $-\frac{\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{h}}{2}$ zu verstehen, je nachdem der Umlauf ABC einem innerhalb des Dreiecks befindlichen Beobachter positiv oder negativ erscheint (IV. 5).

Mit Hilfe der Sätze d) und e) erkennt man, dass wie man das Dreieck ABC auch durch Gerade in Dreiecke zerlegen mag, die Summe der Zahlen dieser Theildreiecke stets $\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{h}/2$ beträgt.

Auf die Zahl eines n-Ecks führt der Satz von Möbius (Werke II. S. 486):

14) „Sind n Punkte A_1, $A_2 \cdots A_n$ und ein beliebiger Punkt P in der Ebene gegeben, so hat die Summe der Zahlen der Dreiecke

$$A_1A_2P + A_2A_3P + \cdots + A_{n-1}A_nP + A_nA_1P$$

einen von der Lage des Punktes P unabhängigen Werth, welchen wir als die Zahl des einfachen n-Ecks $A_1A_2 \cdots A_n$ erklären.“ (Beweis durch den Schluss von n auf $n+1$.) — Theilen wir dieses n-Eck durch eine Sehne QR in zwei Theile, so liefert die Summe der Zahlen der beiden Theile desselben in der That den soeben als Zahl des n-Ecks $A_1A_2 \cdots A_n$ erklärten Werth.

15) Auch erhellt jetzt, dass wenn ein Vieleck Theil eines andern ist, die Zahl desselben kleiner ist als die des letzteren.

VIII. Abschnitt.

Reelle Potenzen, Wurzeln, Logarithmen.

1. Unter der m^{ten} Potenz einer beliebigen reellen Zahl a versteht man das Product aus m Factoren a

$$a^m = a \cdot a \cdots a \,(m\text{-mal})$$

(vgl. II. 9). a heisst die Basis oder der Dignand, m der Exponent. Unter der ersten Potenz von a versteht man die Zahl a selbst ($a^1 = a$). Die zweite Potenz der Zahl a wird ihr Quadrat, die dritte ihr Cubus, die vierte ihr Biquadrat genannt.

Insbesondere hat man

$$0^m = 0, \quad (-1)^{2k-1} = -1, \quad (-1)^{2k} = +1,$$

wo m, k irgend welche natürliche Zahlen bedeuten.

Aus der Definition der Potenz ergeben sich unmittelbar die folgenden Relationen

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad a^m \cdot b^m = (a\,b)^m, \tag{I}$$

worin a, b beliebige reelle, m, n beliebige natürliche Zahlen bezeichnen (vgl. II. 9). Man hat ferner, falls nur a nicht 0 ist,

$$a^m : a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n), \\ 1 : a^{n-m} & (m < n) \end{cases} \qquad \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m. \tag{II}$$

Die Relationen (II) können unmittelbar aus der ersten und dritten in (I) abgeleitet werden, so dass sie in Zukunft neben diesen nicht mehr aufgeführt zu werden brauchen. So findet man, wenn a nicht 0 und $m > n$, aus

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^m \quad a^{m-n} = a^m : a^n \quad 1 : a^{m-n} = a^n : a^m, \tag{1}$$

aus

$$a^m \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^m = b^m \quad \left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{b^m}{a^m}.$$

Wichtig ist endlich der in der folgenden Relation ausgesprochene Satz, worin a b zwei verschiedene reelle Zahlen bedeuten:

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}. \quad \text{(III)}$$

Man verificirt denselben, indem man die rechte Seite mit $a - b$ multiplicirt.

2. Ungleichungen. — Es seien jetzt a, b beliebige, jedoch verschiedene positive, m, n beliebige, ebenfalls verschiedene natürliche Zahlen.

1) Ist $a > b$, so hat man $a^m > b^m$. (Nach Satz 5) auf S. 158 durch den Schluss von m auf $m + 1$.)

2) Ist $m > n$, so hat man simultan mit

$$a \gtrless 1 \qquad a^m \gtrless a^n. \quad \text{(Nach Formel (1) in Nr. 1.)}$$

3) $m(a-b)\,b^{m-1} < a^m - b^m < m(a-b)\,a^{m-1} \quad (m > 1)$.

Die Relation folgt aus (III) und zwar sowohl wenn $a > b$, als auch wenn $a < b$. Setzt man hier

$$a = 1 + d \qquad b = 1,$$

sodass $-1 < d \gtrless 0$ sein muss, und hinterher $(1+d)^{m-1} = (1+d)^m : (1+d)$, so erhält man leicht

4) $1 + md < (1+d)^m < \dfrac{1}{1 - \dfrac{md}{1+d}} \qquad (m > 1)$.

Der zweite Theil der Relation setzt jedoch voraus, dass der Nenner positiv, somit $d < \dfrac{1}{m-1}$ sei.

Manchmal sind auch die weiteren Grenzen für $(1+d)^m$

$$1 + \frac{md}{1+d} < (1+d)^m < \frac{1}{1 - md},$$

wobei rechts $d < 1 : m$ sein muss, von Nutzen.

5) „Bedeutet a einen positiven echten Bruch, so ist, wie gross die natürliche Zahl m auch sein mag, stets

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1} < 1 : (1 - a).\text{“}$$

Der Satz ergiebt sich unmittelbar aus der Formel (III) durch die Annahme $b = 1$, wonach man findet

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1} + \frac{a^m}{1-a}. \quad \text{(IV)}$$

Folgesatz. „Je nachdem die positive Zahl a grösser oder kleiner als 1 ist, hat man $\lim\limits_{n=+\infty} a^n = +\infty$ oder 0.“

Wir haben nämlich, wenn $a > 1$ ist, nach 4)

$$a^n > 1 + n(a - 1);$$

mithin ist a^n grösser als die beliebig vorgegebene positive Zahl G, wenn nur $n > (G - 1) : (a - 1)$ ist. Ist $a < 1$, so setze man $a = 1 : e$, sodass $e > 1$ ist, und wiederhole die Rechnung am Schlusse von S. 91. Dann findet man, dass wenn nur n gross genug ist, $a^n < \varepsilon$ ist.

3. Potenzen der Binome. Der binomische Satz. — Sind a, b beliebige reelle Zahlen, so ergiebt sich durch Ausführung der Multiplicationen

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\\ &\ldots\end{aligned}$$

Man schliesst daraus, dass $(a+b)^m$ ein Ausdruck von der Form

(a) $(a+b)^m = a^m + m_1 a^{m-1} b + \cdots + m_r a^{m-r} b^r + \cdots + m_{m-1} a b^{m-1} + b^m$

sein müsse, worin die Coefficienten $m_1, m_2 \cdots m_{m-1}$ ganze positive Zahlen bedeuten. Wird nämlich diese Behauptung als richtig angenommen, wie sie es in der That für $m = 2, 3, 4$ ist, so trifft sie auch zu für

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m \cdot (a+b).$$

In derselben Art kann man zeigen, dass die Binomialcoefficienten m_r die folgenden Werthe haben müssen

(b) $$m_r = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+1)}{1\cdot 2 \cdots r}$$

d. i.

$$m_1 = m,\ m_2 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdots,\ m_m = 1.$$

In der That stimmen diese Formeln für $m = 2, 3, 4$. Es besteht aber — wenn wir unter m_0 1 verstehen — die allgemeine Formel

(c) $$m_{r-1} + m_r = (m+1)_r \qquad (r = 1, 2 \cdots m),$$

wie man durch unmittelbare Einsetzung der Ausdrücke (b) erkennt. — Angenommen nun, es sei die Formel (a) nach Einsetzung der Werthe (b) für die m_r richtig, so ergiebt sich vermöge (c) durch Ausführung der Multiplication

$$\begin{aligned}(a+b)^{m+1} = (a+b)^m \cdot (a+b) = a^{m+1} + (m+1)_1 a^m b + \cdots\\ + (m+1)_r a^{m+1-r} b^r + \cdots + (m+1)_m a b^m + b^{m+1}\end{aligned}$$

d. i. es bewähren sich die Formeln (a) und (b) auch, wenn wir den Exponenten m durch $m+1$ ersetzen. Diese Formeln gelten aber für $m = 2$, also auch für $m = 3, 4$ u. s. f., somit für jeden Exponenten m.

Bezeichnet man das Product aller natürlichen Zahlen von 1 bis n, $1\cdot 2 \cdots n$, mit $n!$, so folgt aus (b) noch

$$m_r = \frac{m!}{r!\,(m-r)!}$$

und somit der Satz

(d) $$m_r = m_{m-r}.$$

Die Binomialformel (a) verändert sich also bei Vertauschung der Zahlen a und b nicht. — NB. Man gebraucht anstatt m_r auch die Bezeichnung $\binom{m}{r}$.

4. Potenzen der Polynome. — Wir schliessen hieran den polynomischen Satz d. i. die Regel, nach welcher die Glieder der Potenz

(e) $$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^m$$

angeschrieben werden können, ohne dass die successiven Multiplicationen auszuführen sind. „Es seien $p_1, p_2 \cdots p_n$ ganze Zahlen, deren jede alle Werthe von 0 bis m annehmen kann. Der Ausdruck $(a_1 + a_2 + \cdots a_n)^m$ ist die Summe der Glieder

(f) $$\frac{m!}{p_1!\,p_2!\cdots p_n!}\,a_1^{p_1}\cdots a_r^{p_r}\cdots a_n^{p_n},$$

die dadurch entstehen, dass für $p_1, p_2 \cdots p_n$ alle Systeme von Werthen gesetzt werden, deren Summe m beträgt:

$$p_1 + p_2 + \cdots p_n = m.$$

Dabei hat man unter 0! 1 zu verstehen. Die Anzahl der Glieder des Ausdruckes beträgt $\binom{m+n-1}{m}$." — Der Satz ist für $m = 1$ richtig. Angenommen nun, er gelte für irgend einen Werth von m, so lässt sich leicht zeigen, dass er auch für den Werth $(m + 1)$ besteht. Da

$$(a_1 + \cdots + a_n)^{m+1} = (a_1 + \cdots + a_n)^m\,(a_1 + \cdots + a_n),$$

so ergeben sich dafür nur Glieder von der vorstehenden Form (f), worin aber $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = m + 1$ ist. Jedes derselben entsteht aus den Gliedern

$$a_1^{p_1}\cdots a_r^{p_r-1}\cdots a_n^{p_n}$$

von $(a_1 + \cdots + a_n)^m$ durch Multiplication mit a_r, wobei r alle jene Werthe annimmt, wofür das zugehörige p_r nicht 0 ist — und nur aus diesen. Bezeichnen wir sie mit

(g) $$p_1', p_2' \cdots p_k' \qquad (k \leqq n,\ p_1' + \cdots + p_k' = m + 1),$$

so finden wir als Coefficienten des allgemeinen Gliedes von $(a_1 + \cdots + a_n)^{m+1}$ zufolge Voraussetzung

$$\frac{m!}{(p_1'-1)!\,p_2'!\cdots p_k'!} + \frac{m!}{p_1'!\,(p_2'-1)!\cdots p_k'!} + \cdots$$
$$+ \frac{m}{p_1'!\,p_2'!\cdots(p_k'-1)!} = \frac{m!}{p_1'!\,p_2'\cdots p_k'!}\,(p_1' + p_2' + \cdots + p_k') = \frac{(m+1)!}{p_1'!\,p_2'\cdots p_k'!};$$

so dass in der That der dem Exponenten $(m + 1)$ zufolge der Regel entsprechende Coefficient erscheint. Die Regel gilt somit allgemein.

Dass die Anzahl u_m der Glieder in der ausgerechneten Potenz (e) [d. i. die Anzahl der Combinationen m-ter Classe von n Elementen mit Wiederholung] den angegebenen Betrag besitzt, wird ebenfalls durch den Schluss von m auf $m+1$ gezeigt. Für $m = 1$ erhalten wir daraus in der That n. Lassen wir nun

$$u_m = \binom{m+n-1}{m}$$

sein und bilden wir die Glieder der $(m+1)$-ten Potenz von $(a_1 + \cdots + a_n)$ in folgender Weise. An jedes Glied (f) setzen wir nacheinander die Factoren $a_1, a_2 \cdots a_n$ und ausserdem einen jeden der darin vorkommenden m Factoren an, wodurch wir im Ganzen $(m+n)\,u_m$ Monome erhalten. Davon sind indess je $m+1$ identisch. In der That entsteht das Glied von $(a_1 + \cdots + a_n)^{m+1}$ mit den Exponenten (g) p_1' Male aus dem Gliede von (e) mit den Exponenten

$$p_1' - 1,\ p_2' \cdots p_k',$$

p_2' Male aus dem mit den Exponenten

$$p_1',\ p_2' - 1 \cdots p_k'$$

u. s. f., im Ganzen also

$$p_1' + p_2' + \cdots + p_k' = m + 1$$

Male. Wir haben somit

$$u_{m+1} = \frac{(m+n)\,u_m}{m+1} = \binom{m+n}{m+1}. \quad \text{W. z. b. w.}$$

5. Die Wurzeln.

Satz. Die Gleichung $x^m = a$, worin m eine natürliche, a eine positive reelle Zahl bedeutet, hat stets eine und nur eine positive Auflösung, welche die absolute m^{te} Wurzel aus der Zahl a heisst: $x = \sqrt[m]{a}$.[1] a heisst der Radicand. — Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man $\sqrt{a}$.

Beweis. Die m^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen wachsen über jede endliche Zahl. Es muss daher eine ganze Zahl $c_0 \geqq 0$ geben, derart dass entweder $c_0^m = a$ oder

$$c_0^m < a < c_0^{m+1}.$$

Im ersten Falle haben wir die Lösung $x = c_0$ unserer Gleichung gefunden; im zweiten theilen wir das Intervall $(c_0, c_0 + 1)$ in e $(\geqq 2)$ gleiche Theile und bilden die m^{ten} Potenzen

$$\left(c_0 + \frac{1}{e}\right)^m, \quad \left(c_0 + \frac{2}{e}\right)^m \cdots \left(c_0 + \frac{e-1}{e}\right)^m.$$

Unter denselben befindet sich entweder eine rationale Zahl $c_0 + \frac{c_1}{e}$, wofür

$$0 < c_1 \leqq e - 1 \qquad \left(c_0 + \frac{c_1}{e}\right)^m = a$$

oder es liegt a zwischen zwei von den bis jetzt gebildeten m^{ten} Potenzen

$$0 \leqq c_1 \leqq e - 1 \qquad \left(c_0 + \frac{c_1}{e}\right)^m < a < \left(c_0 + \frac{c_1 + 1}{e}\right)^m.$$

1) Unter dem Symbol $\sqrt[m]{a}$ wird bei positivem a stets die absolute Wurzel verstanden.

Im ersten Falle ist $x = c_0 + \frac{c_1}{e}$ eine Lösung unserer Gleichung; im zweiten theilen wir das Intervall

$$\left(c_0 + \frac{c_1}{e},\quad c_0 + \frac{c_1 + 1}{e}\right)$$

in e gleiche Theile, wodurch sich eine der vorstehenden analoge Disjunction ergiebt. U. s. f. Das Ergebniss des eingeschlagenen Verfahrens wird folgendes sein:

Entweder existirt eine rationale Zahl von der Form

$$x = c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_k}{e^k},$$

welche die Gleichung $x^m = a$ befriedigt, oder man gelangt zu einer unbegrenzten Reihe von ganzen Zahlen $c_0, c_1, c_2 \cdots$, unter denen von c_1 an alle zwischen 0 und $e - 1$ liegen $(0 \leqq c_r \leqq e - 1)$, welche die Eigenschaft besitzt, dass wie gross auch der Zeiger n sein mag,

$$\text{(h)} \qquad S_n^m < a < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m,$$

worin zur Abkürzung

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \cdots + \frac{c_n}{e^n} = S_n$$

gesetzt ist. Eben dieselbe Zahlreihe definirt eine reelle Zahl $(S_n) = c$, deren m^{te} Potenz, wie leicht zu zeigen ist, die Zahl a ist. Da nämlich

$$S_n < c < S_n + \frac{1}{e^n} \qquad S_n^m < c^m < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m,$$

so folgt nach (h), dass

$$S_n^m - \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m < c^m - a < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m - S_n^m$$

d. i. nach 2. 3)

$$|c^m - a| < \left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^m - S_n^m < m\left(S_n + \frac{1}{e^n}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{e^n}\cdot$$

Nun ist (vgl. Formel (8) auf S. 90)

$$S_n + \frac{1}{e^n} < c_0 + 1,$$

also

$$|c^m - a| < \frac{m\,(c_0 + 1)^{m-1}}{e^n}\cdot$$

Daraus erhellt, dass $|c^m - a|$ kleiner ist als jede positive Zahl ε. Nach IV. 10 braucht man nur

$$n > \frac{m\,(c_0 + 1)^{m-1} - \varepsilon}{\varepsilon\,(e - 1)}$$

zu denken. — Somit ist zufolge des 1. Cor. in VII. 8 $c^m = a$.

Dass es nur eine Zahl $x > 0$ geben kann, wofür $x^m = a$, ist unmittelbar aus dem 1. Satze in Nr. 2 zu ersehen. Aus demselben folgt auch, dass wenn $a = a'$ ist, $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a'}$ ist.

Die m^{te} Wurzel aus einer ganzen positiven Zahl, welche nicht die m^{te} Potenz einer anderen natürlichen Zahl ist, ist irrational. Denn jeder eigentliche Bruch liefert, zur m^{ten} Potenz erhoben, wieder einen eigentlichen Bruch (vgl. III. 17).

Die Gleichung $x^m = a$ hat, wenn m gerade ist, noch die eine negative Lösung $x = -\sqrt[m]{a}$. Die Gleichung $x^m = 0$ hat die einzige Lösung $x = 0$. Die Gleichung $x^m = -a\,(a > 0)$ hat, wenn m gerade ist, keine reelle Lösung; wenn m ungerade, die einzige reelle Lösung $x = -\sqrt[m]{a}$. Bei ausschliesslicher Benützung mit reellen Zahlen kann sie mit $\sqrt[m]{-a}$ bezeichnet werden.

6. Sätze über die absoluten Wurzeln. — Wir verstehen im Folgenden unter den Radicanden a, b positive reelle Zahlen.[1]) Dann bestehen die folgenden Relationen, in denen m, n, p natürliche Zahlen > 1 bedeuten:

$$1)\ \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n} \qquad 2)\ (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n} \qquad 3)\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$4)\ \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab} \qquad 5)\ \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a:b}.$$

Der Beweis derselben bietet sich unmittelbar dar, wenn man auf die Bedeutung der Wurzeln zurückgeht. Um z. B. 2) zu zeigen, setze man $\sqrt[m]{a} = x$, so dass $x^m = a$. Dann ist $a^n = x^{mn} = (x^n)^m$, also $x^n = \sqrt[m]{a^n}$.

Es gelten ferner die Ungleichungen:

1) Ist $a > b > 0$, so ist $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$. (Indirect nach 2. 1).)

2) Ist $m > n$, so ist simultan mit $a \gtrless 1$ $\sqrt[m]{a} \lessgtr \sqrt[n]{a}$. (Indirect nach 2. 2), indem man zur Potenz mn erhebt.)

3) Ist $1 + d > 0$, d jedoch nicht Null, so hat man

$$\frac{1}{1 - \frac{d}{m(1+d)}} < \sqrt[m]{1+d} < 1 + \frac{d}{m}. \tag{i}$$

Man setze in Nr. 2. 3)

$$a = \sqrt[m]{1+d} \qquad b = 1,$$

so dass sich ergiebt

$$m\left(\sqrt[m]{1+d} - 1\right) < d < m\left(\sqrt[m]{1+d} - 1\right)\left(\sqrt[m]{1+d}\right)^{m-1}$$
$$= m(1+d)\left(1 - \frac{1}{\sqrt[m]{1+d}}\right).$$

---

1) Die Sätze 1)—5) gelten auch für die ungeraden Wurzeln aus negativen Zahlen, unter $\sqrt[m]{-a}$ stets $-\sqrt[m]{a}$ verstanden.

Mithin ist

$$\sqrt[m]{1+d} - 1 < \frac{d}{m} \qquad \frac{d}{m(1+d)} < 1 - \frac{1}{\sqrt[m]{1+d}}.$$

Daraus folgen die Relationen (i) unmittelbar, wenn man bemerkt, dass hier stets $1 - \frac{d}{m(1+d)} > 0$ sein muss.

In Nr. 9 werden auch die Beziehungen

$$1 + \frac{d}{m(1+d)} < \sqrt[m]{1+d} < \frac{1}{1-\frac{d}{m}}, \tag{k}$$

worin rechts $d < m$ sein muss, benutzt. Sie ergeben sich aus (i) durch die Bemerkung, dass vermöge der Ungleichung $1 - \omega^2 < 1$, wenn nur $1 \mp \omega$ positiv ist,

$$1 \pm \omega < 1 : (1 \mp \omega)$$

ist, und gelten auch für $m = 1$.

Anmerkung. Man kann, falls $d > 0$, für den positiven Unterschied

$$x = 1 + \frac{d}{m} - \sqrt[m]{1+d}$$

auch eine engere obere Grenze aufstellen, als die Relation (i) liefert. So hat man, wenn $m = 2$,

$$\sqrt{1+d} = 1 + \frac{d}{2} - x,$$

also durch Quadrirung

$$0 = \frac{d^2}{4} - 2x\left(1 + \frac{d}{2}\right) + x^2$$

und

$$x = \frac{\frac{1}{8}d^2}{1 + \frac{1}{2}(d - x)} < \frac{1}{8}d^2, \quad \text{indem } 0 < x < \frac{d}{2} \text{ ist.}$$

Durch Erheben der Gleichung

$$\sqrt[3]{1+d} = 1 + \frac{d}{3} - x$$

zur dritten Potenz gelangt man zur Gleichung

$$3x\left[\left(1+\frac{d}{3}\right)^2 - \left(1+\frac{d}{3}\right)x + \frac{x^2}{3}\right] = \frac{d^2}{3} + \frac{d^3}{27}.$$

Demnach ist

$$3x\left(1+\frac{d}{3}\right)\left(1+\frac{d}{3}-x\right) < \frac{d^2}{3} + \frac{d^3}{27},$$

somit

$$x < \tfrac{1}{9}d^2\left(1+\frac{d}{9}\right) : \left(1+\frac{d}{3}\right)\left(1+\frac{d}{3}-x\right).$$

Da hier $x < d : 3$ ist, so hat man also

$$x < \tfrac{1}{9}d^2\left(1+\frac{d}{9}\right) : \left(1+\frac{d}{3}\right) < \tfrac{1}{9}d^2.$$

Umständlicher gestaltet sich hier der Nachweis des allgemeinen Satzes, dass

$$x < \frac{m-1}{2m^2} d^2 \tag{1}$$

ist. Da man denselben mit Hilfe der binomischen Reihe sehr leicht liefern kann (IX. 17), so haben wir uns darauf beschränkt, in den Uebungen am Schlusse des Abschnittes die zur directen Ableitung der Formel (1) nöthigen Anweisungen zu geben.

7. Die numerische Berechnung der m-ten Wurzel aus einer absoluten Decimalzahl a.[1]

Es sei in der systematischen Form

$$a = a_0 10^p + a_1 10^{p-1} + \cdots \qquad \left(p \gtreqless 0\right) \tag{1}$$

und

$$\sqrt[m]{a} = b = c_0 10^k + c_1 10^{k-1} + \cdots. \tag{2}$$

1. Satz. Die höchste Ordnung in der Zahl $\sqrt[m]{a}$ ist der Quotient der Division $p:m$ im gewöhnlichen Sinne, d. i. diejenige Zahl, wofür

$$p = mk + r \qquad (0 \leqq r < m) \tag{3}$$

ist. — Man hat nämlich einerseits nach (1)

$$10^p \leqq a < 10^{p+1},$$

andererseits, indem man die Beziehungen

$$10^k \leqq b < 10^{k+1}$$

zur m^{ten} Potenz erhebt, wegen $b^m = a$

$$10^{mk} \leqq a < 10^{mk+m}.$$

Es ist mithin $p < mk + m$, $mk < p + 1$ oder $mk \leqq p \leqq mk + m - 1$. Man findet demnach k in (3) angegebener Weise.

2. Satz. „Die erste geltende Ziffer c_0 von $\sqrt[m]{a}$ wird auf folgende Weise ermittelt. Man theilt die Ganzen der Zahl a von rechts nach links, die Decimalstellen derselben vom Decimalpunkte aus in der Richtung von links nach rechts in Gruppen von je m Ziffern. D. h. man bringt a auf die Form

$$a = C_0 10^{mk} + C_1 10^{m(k-1)} + \cdots + C_r 10^{m(k-r)} + \cdots, \tag{4}$$

---

1) Absatz 1)—3) nach einer von A. Martini-Zuccagni ins Italienische übersetzten Arbeit von O. Stolz im Periodico di Matematica An. 1898; Absatz 4) mit Ausnahme der schon früher von Gmeiner gemachten Bemerkung, dass die Beziehung (15) S. 195 dann jedenfalls gilt, wenn $C \geqq 11(m-1)$ ist, nach Lia Predella (Supplemento al Per. di Mat. 1901 S. 113).

J. Lüroth (Vorlesungen üb. numerisches Rechnen S. 143, 158) giebt nach Darboux ein Verfahren, die Ziffer c_r im Falle dass $m = 2$ oder 3 ist, zu bestimmen, ohne Versuche machen zu müssen. Dieses mag man dann anwenden, wenn C zu klein ist, um von vornherein sicher sein zu können, dass c_r nur den Wert g_r oder $g_r - 1$ haben könne.

worin C_0, $C_1 \cdots C_r \cdots$ natürliche Zahlen von höchstens je m Ziffern bedeuten.“

„Ist C_0 die m^{te} Potenz einer der Zahlen $1, 2 \cdots 9$, so ist c_0 gleich dieser Zahl. Sonst hat man für c_0 diejenige unter ihnen zu nehmen, deren m^{te} Potenz kleiner ist als C_0 und dabei dieser Zahl möglichst nahe kommt.“ Es ist also entweder $c_0^m = C_0$ oder

$$c_0^m < C_0 < (c_0 + 1)^m. \tag{5}$$

Beweis. Zufolge (2) muss

$$c_0 10^k \leqq b < (c_0 + 1)\, 10^k$$

sein. Durch Erheben dieser Beziehungen zur m^{ten} Potenz erhält man, da $b^m = a$ ist, die folgenden

$$c_0^m 10^{mk} \leqq a < (c_0 + 1)^m 10^{mk}.$$

Stellt man dieselben mit den aus (4) hervorgehenden Beziehungen

$$C_0 10^{mk} \leqq a < (C_0 + 1)\, 10^{mk}$$

zusammen, so ergiebt sich, dass

$$c_0^m 10^{mk} < (C_0 + 1)\, 10^{mk} \qquad C_0 10^{mk} < (c_0 + 1)^m 10^{mk}$$

d. i.

$$c_0^m < C_0 + 1 \qquad C_0 < (c_0 + 1)^m$$

oder

$$c_0^m \leqq C_0 < (c_0 + 1)^m$$

sein muss.

3) Die Ermittelung der auf die erste geltende Ziffer von $\sqrt[m]{a}$ folgenden beruht auf dem nachstehenden Satze:

Kennt man schon die r Ziffern $c_0, c_1 \cdots c_{r-1}$ $(r \geqq 1)$ von $\sqrt[m]{a}$, so setze man

$$c_0 10^k + c_1 10^{k-1} + \cdots + c_{r-1} 10^{k-r+1} = A$$

und bringe den Bruch $B = (a - A^m) : m A^{m-1}$ auf die Form

$$B = \frac{a - A^m}{m A^{m-1}} = g_r 10^{k-r} + R, \tag{6}$$

worin g_r eine natürliche Zahl oder Null bedeutet, und

$$0 \leqq R < 10^{k-r} \tag{7}$$

ist. Alsdann ist $c_r \leqq g_r$. (8)

Beweis. Setzt man

$$\sqrt[m]{a} = A + x \tag{9}$$

d. i.

$$c_r 10^{k-r} + \cdots = x, \tag{10}$$

so hat man

$$x = A \left\{ \sqrt[m]{1 + \frac{a - A^m}{A^m}} - 1 \right\},$$

folglich nach der Formel (i) in Nr. 6

$$0 < x < \frac{a - A^m}{m A^{m-1}} = B. \tag{11}$$

Nun ist einerseits nach (10) $c_r 10^{k-r} \leqq x$, andererseits zufolge der Beziehungen (11), (6) und (7)

$$x < (g_r + 1)\, 10^{k-r}.$$

Somit hat man

$$c_r 10^{k-r} < (g_r + 1)\, 10^{k-r}, \quad \text{also} \quad c_r < g_r + 1 \quad \text{oder} \quad c_r \leqq g_r.$$

Nachdem durch die Beziehung (8) eine obere Grenze für c_r gefunden ist, hat man durch Versuche diejenige Ziffer c_r zu ermitteln, wofür

$$(A + c_r 10^{k-r})^m \leqq a < (A + (c_r + 1)\, 10^{k-r})^m$$

ist. Diese Arbeit kann man sich dadurch erleichtern, dass man auch eine untere Grenze für c_r aufstellt.

4) Eine solche ergiebt sich auf folgende Weise. Nach (9) und (10) ist

$$a = (A + x)^m < [A + (c_r + 1) 10^{k-r}]^m. \tag{12}$$

Wir haben nach dem binomischen Satze in Nr. 3

$$[A + (c_r + 1) 10^{k-r}]^m$$
$$= A^m + m A^{m-1} \Big[c_r + 1 + \frac{1}{m} \sum_2^m {}^n \binom{m}{n} (c_r + 1)^n \Big(\frac{10^{k-r}}{A}\Big)^{n-1} \Big] 10^{k-r}.$$

Setzen wir nun die r-ziffrige ganze Zahl

$$\frac{A}{10^{k-r+1}} = c_0 10^{r-1} + c_1 10^{r-2} + \cdots + c_{r-1} = C,$$

so ist $10^{k-r} : A = 1 : 10\, C$; wir erhalten demnach aus (12) die Ungleichung

$$\frac{a - A^m}{m A^{m-1}} < \Big\{ c_r + 1 + \frac{10}{m} \sum_2^m {}^n \binom{m}{n} \frac{1}{C^{n-1}} \Big(\frac{c_r + 1}{10}\Big)^n \Big\} 10^{k-r}. \tag{13}$$

Zufolge der Gleichung (6) ist der Ausdruck links (B) nicht kleiner als $g_r \cdot 10^{k-r}$. Andererseits ist $c_r + 1 \leqq 10$. Es folgt demnach aus (13) eine neue Ungleichung, welche durch 10^{k-r} dividirt, lautet:

$$g_r < c_r + 1 + \frac{10}{m} \sum_2^m {}^n \binom{m}{n} \frac{1}{C^{n-1}}. \tag{14}$$

Lassen wir im letzten Gliede C von Null ins Unendliche wachsen, so nimmt es beständig ab und zwar von $+\infty$ bis zu 0. Es giebt also eine gewisse ganze Zahl C_0, so dass für $C < C_0$ der in Rede stehende Ausdruck grösser, für $C > C_0$ kleiner als 1 ist. Für $C = C_0$ kann er gleich 1 sein. Im Falle dass $C \geqq C_0$ ist, ergiebt sich aus (14) die Beziehung

$$g_r < c_r + 2 \quad \text{d. i.} \quad g_r - 1 \leqq c_r. \tag{15}$$

Ist $m = 2$, so wird aus dem letzten Gliede in (14) $5:C$; es ist also nicht grösser als 1, wenn $C \geqq 5$ ist. Mithin ist $C_0 = 5$. Für $m = 3$ geht dieses Glied in

$$\frac{10}{3}\left(\frac{3}{C} + \frac{1}{C^2}\right) = \frac{10\,(3\,C+1)}{3\,C^2}$$

über, welcher Ausdruck für $C = 11$ kleiner, für $C = 10$ grösser als 1 ist. C_0 ist also 11.

Um bei willkürlichem m eine Grenze für C zu erhalten, über der die Beziehung

$$\frac{10}{m}\sum_2^m{}^n \binom{m}{n}\frac{1}{C^{n-1}} < 1 \qquad (\alpha)$$

besteht, kann man folgendermassen vorgehen. Es ist nach Nr. 3

$$\left(1+\frac{1}{C}\right)^m = 1 + \frac{m}{C} + \frac{1}{C}\sum_2^m{}^n \binom{m}{n}\frac{1}{C^{n-1}},$$

somit

$$\frac{1}{C}\sum_2^m{}^n \binom{m}{n}\frac{1}{C^{n-1}} = \left(1+\frac{1}{C}\right)^m - 1 - \frac{m}{C}. \qquad (\beta)$$

Denkt man sich $\sqrt[m]{a}$ soweit ausgerechnet, dass $C > m - 1$ ist, so hat man zufolge 4) in Nr. 2

$$\left(1+\frac{1}{C}\right)^m < 1:\left(1 - \frac{m:C}{1+1:C}\right) = 1 + \frac{m}{C-m+1}.$$

Hiernach ergiebt sich aus der Gleichung (β), dass

$$\frac{1}{C}\sum_2^m{}^n \binom{m}{n}\frac{1}{C^{n-1}} < \frac{m}{C-m+1} - \frac{m}{C} = \frac{m\,(m-1)}{C\,(C-m+1)}$$

ist. Mithin finden wir

$$\frac{10}{m}\sum_2^m{}^n \binom{m}{n}\frac{1}{C^{n-1}} < \frac{10\,(m-1)}{C-m+1}.$$

Die rechte Seite ist $\leqq 1$, wenn $C \geqq 11\,(m-1)$ ist. Unter dieser Bedingung besteht also jedenfalls die Beziehung (α).

Fassen wir Alles zusammen, so ergiebt sich der Satz: „Ist $C \geqq 11\,(m-1)$, so besteht die Beziehung (15) d. h. es ist c_r entweder gleich g_r oder $g_r - 1$. Falls $m = 2$ ist, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass $C \geqq 5$, und falls $m = 3$, dass $C > 10$ ist.“

Die Beziehung (15) zeigt, dass bei den soeben erwähnten Beschränkungen von C die ganze Zahl g_r 10 nicht überschreiten kann. Obwohl in der Regel g_r kleiner als 10 ausfällt, so giebt es doch für jeden Wurzelexponenten m noch Zahlen a von der Beschaffenheit, dass für $r = n$, wo die natürliche Zahl n beliebig gross gewählt werden kann, $g_r = 10$ ist. Solcher Art sind z. B. die Zahlen $a = 10^{n\,m} - 1$, wie sich leicht nachweisen lässt. Zunächst hat man nämlich

$$10^n - 1 < \sqrt[m]{10^{nm} - 1} < 10^n,$$

so dass für $r = n$ $A = 10^n - 1$ sein muss. Ferner ist nach 3) in Nr. 2

$$10^{nm} - (10^n - 1)^m > m(10^n - 1)^{m-1},$$

woraus

$$10^{nm} - 1 - (10^n - 1)^m \geqq m(10^n - 1)^{m-1}$$

folgt. Demnach ergiebt die Gleichung (6) im vorliegenden Falle

$$B = \frac{10^{nm} - 1 - (10^n - 1)^m}{m(10^n - 1)^{m-1}} \geqq 1 \quad \text{und} \quad (g_n + 1)\, 10^{k-n} > 1$$

und da hier $k = n - 1$ ist, $g_n \geqq 10$. Diese Relation geht in $g_n = 10$ über, wenn nur n so gross gewählt ist, dass das zu $r = n$ gehörende $C \geqq 11(m-1)$ ist. Denn unter dieser Voraussetzung muss ja, wie bemerkt, zugleich $g_n \leqq 10$ sein.

In Uebung 7) S. 222 ist eine Zahl angegeben, die g_r überhaupt nicht überschreiten kann.

7*. Verbesserung der durch das Verfahren in Nr. 7 ermittelten Näherungswerthe der *m*-ten Wurzel aus *a*.

Setzen wir in der Formel (1) auf S. 193

$$d = \frac{a - A^m}{A^m} = \frac{mB}{A}$$

und multipliciren wir mit A, so erhalten wir die Formel

$$0 < A + B - \sqrt[m]{a} < \frac{m-1}{2A} B^2. \tag{15*}$$

Auf Grund dieser Ungleichungen kann man den Näherungswerth A für die $\sqrt[m]{a}$ dadurch um eine noch zu bestimmende Anzahl (s) von Stellen verbessern, dass man den Bruch B auf s weitere Stellen entwickelt. — Es sei also

$$\sqrt[m]{a} = A + c_r 10^{k-r} + \cdots + c_{r+s-1} 10^{k-r-s+1} + x'$$

oder kürzer, indem die s-ziffrige ganze Zahl

$$c_r 10^{s-1} + c_{r-1} 10^{s-2} + \cdots + c_{r+s-1} = v \quad \text{und} \quad k - r - s + 1 = l$$

gesetzt wird,

$$\sqrt[m]{a} = A + v10^l + x' \qquad (0 \leqq x' < 10^l).$$

Ferner sei

$$B = h10^l + R' \qquad (0 \leqq R' < 10^l). \tag{16}$$

Um nun die ganzen Zahlen v und h mit einander zu vergleichen, schreiben wir die vorstehenden Beziehungen so:

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{a} - 10^l &< A + v10^l \leqq \sqrt[m]{a} \\ B - 10^l &< \qquad h10^l \leqq B. \end{aligned} \tag{17}$$

Daraus folgt, dass

$$A + B - \sqrt[m]{a} - 10^l < (h - v)10^l < A + B - \sqrt[m]{a} + 10^l$$

ist. Somit ist nach den Ungleichungen (15*)

$$-10^l < (h-v)10^l < \frac{m-1}{2A} B^2 + 10^l. \tag{18}$$

Nun ist $A \geqq c_0 10^k$ und zufolge (16) ist

$$B < (h+1)10^l, \quad \text{also} \quad \frac{m-1}{2} B^2 : A < \frac{m-1}{2c_0} \frac{(h+1)^2}{10^{r+s-1}} 10^l.$$

Wir können demnach aus der Beziehung (18), wenn wir sie noch durch 10^l dividiren, die nachstehende ableiten:

$$-1 < h-v < \frac{m-1}{2c_0} \cdot \frac{(h+1)^2}{10^{r+s-1}} + 1. \tag{19}$$

Es ist mithin jedenfalls $0 \leqq h-v$ d. i. $h \geqq v$.

Gewöhnlich übersteigt die Zahl g_r in (6) 9 nicht, so dass $B < 10^{k-r+1}$ ist. Wir haben somit nach (17) $h \cdot 10^l < 10^{k-r+1}$ d. i. $h < 10^s$ oder $h+1 \leqq 10^s$. Für diesen Fall ergiebt sich aus den Ungleichungen (19)

$$0 \leqq h-v < \frac{m-1}{2c_0} \cdot \frac{1}{10^{r-s-1}} + 1$$

und daraus, wenn $\frac{m-1}{2c_0} \leqq 10^i$ ist,

$$0 \leqq h-v < \frac{1}{10^{r-s-i-1}} + 1. \tag{20}$$

Nehmen wir s so an, dass $r-s-i-1=0$ ist, setzen also $s=r-i-1$, so können wir aus (20) bei dem Umstande, dass $h-v$ eine ganze Zahl ist, schliessen, dass $0 \leqq h-v \leqq 1$, dass also $v=h$ oder $v=h-1$ ist. „Berechnet man den Bruch B genau auf $r-i-1$ Stellen, so stimmt $A+h \cdot 10^{k-2r+i+2}$ entweder bis auf Einheiten von der Ordnung $10^{k-2r+i+2}$ einschliesslich mit $\sqrt[m]{a}$ überein oder es ist nur um e i n e Einheit von dieser Ordnung zu gross.“[1])

Im Falle der Quadratwurzel ($m=2$) kann man, je nachdem c_0 kleiner als 5 ist oder nicht, $i=0$ oder -1 setzen. Demgemäss bekommen wir zu A $r-1$ bezw. r weitere Stellen von $\sqrt{a}$.[2]) — Für die Kubikwurzel ($m=3$) kann man $i=0$ nehmen, so dass man auf die angegebene Weise zu A $r-1$ weitere Stellen von $\sqrt[3]{a}$ erhält.[2])

Ist $g_r=10$, so hat man nach Gleichung (6) $B < 11 \cdot 10^{k-r}$, daher zufolge (16) $h < 11 \cdot 10^{s-1}$ und $h+1 \leqq 11 \cdot 10^{s-1}$, so dass die Relation (19) die Gestalt annimmt

$$-1 < h-v < \frac{m-1}{2c_0} \cdot \frac{121}{10^{r-s+1}} + 1.$$

Falls hierin

$$\frac{m-1}{2c_0} \cdot \frac{121}{10^{r-s+1}} \leqq 1 \tag{21}$$

---

1) Der Satz findet sich für $m=2$ $i=0$ bei G r a s s m a n n, Arithmetik S. 110. — Eine um etwa $r-1$ Stellen weiter reichende Verbesserung des Näherungswerthes A wird durch die L a m b e r t'sche Formel (IX. Uebung 23) erzielt.

2) Vgl. Ch. R u c h o n n e t, Élém. d. calcul approx. 3. éd. p. 37, 41.

ist, so ergiebt sich daraus

$$0 \leqq h - v \leqq 1. \tag{22}$$

Da jetzt nach (6) $B \geqq 10^{k-r+1}$ und nach (16) $B < (h+1)\,10^{k-r-s+1}$ ist, so findet man $h \geqq 10^s$, während $v < 10^s$ ist; demnach ist

$$h \geqq v + 1;$$

aus dieser und der Relation (22) ergiebt sich aber

$$h - v = 1 \quad \text{d. i.} \quad v = h - 1.$$

Da $v < 10^s$ ist, so hat man nun $10^s \leqq h < 10^s + 1$, so dass

$$h = 10^s \quad \text{und} \quad v = 10^s - 1$$

sein muss. Es ist also h eine $(s+1)$-ziffrige, v dagegen eine s-ziffrige Zahl. Wenn s so gewählt wird, dass die Relation (21) erfüllt ist, so erhält man demnach zu A noch s weitere Stellen von $\sqrt[m]{a}$, indem man $v = 10^s - 1$ setzt.

Für $m = 2$, d. h. für die Quadratwurzel, ist die Relation (21) erfüllt, wenn $c_0 \geqq 7$ und $s \leqq r$, und ebenso wenn $c_0 < 7$ ist und $s \leqq r - 1$ genommen wird. Im ersteren Falle giebt daher $v = 10^r - 1$ noch r, im letzteren $v = 10^{r-1} - 1$ noch $r - 1$ weitere richtige Stellen von $\sqrt{a}$.

Für die Cubikwurzel $(m = 3)$ erhält man, wie die Relation (21) besagt, noch $r - 2$ oder $r - 1$ richtige Stellen zu A, jenachdem $c_0 = 1$ oder $c_0 > 1$ ist, und zwar sind dieselben durch $v = 10^{r-2} - 1$, beziehungsweise $v = 10^{r-1} - 1$ gegeben.

Die Ergänzung von A auf $r + s$ Stellen besteht im vorliegenden Falle, wie die vorstehende Untersuchung gezeigt hat, für jede Wurzel d. h. jeden Wurzelexponenten m aus der s-mal wiederholten Ziffer 9.

8. Erweiterung des Potenzbegriffes auf rationale Exponenten. — Die erste der Formeln (II) auf S. 185 legt die Einführung von Potenzen mit negativen ganzen Exponenten nahe, die mittlere der Formeln (I) a. a. O. die von Potenzen mit gebrochenen Exponenten. In der That besitzen die Ausdrücke, welche auf diesem Wege für die neuen Potenzen erhalten werden, die durch die Formeln (I) ausgesprochenen Potenzeigenschaften.

Um die Erweiterung des Potenzbegriffes systematisch vorzunehmen, haben wir in folgender Weise vorzugehen. Wir befreien zunächst den in VII. 2 und 12 aufgestellten Begriff einer eindeutigen Function von der ihm hinsichtlich der unabhängigen Veränderlichen (des Arguments) noch anklebenden Beschränkung. Unter einer Veränderlichen verstehen wir allgemein ein Zeichen z. B. x, das unbegrenzt viele reelle Zahlen bedeuten kann, deren jede genau angegeben sein muss. Wird jedem dieser Werthe von x durch eine arithmetische Vorschrift eine reelle Zahl y zugeordnet, so heisst diese zweite Veränderliche y eine eindeutige Function des Ar-

gumentes x und wird kurz mit $f(x)$ bezeichnet. So nennen wir z. B. den Ausdruck

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m,$$

worin $a_0, a_1 \cdots a_m$ beliebig gegebene reelle Zahlen bedeuten, eine ganze Function von x und zwar des m^{ten} Grades, den Quotienten zweier ganzen Functionen von x eine rationale gebrochene Function von x.

Nun legen wir uns die Aufgabe vor, unter der Voraussetzung dass die Veränderliche x jeden reellen Werth annehmen darf (oder, wie man auch sagt, in jedem Intervalle (a, b) stetig ist), die eindeutige Function $f(x)$ so zu erklären, dass erstens, was x und y auch für reelle Werthe sein mögen, stets

$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y) \tag{1}$$

ist (mithin zunächst wenigstens die erste der Relationen (I) auf S. 185 besteht) und zweitens $f(1)$ eine gegebene positive Zahl a ist.[1]) — Dass $f(1)$ eine positive Zahl a sein soll, ist keine Beschränkung der Aufgabe; denn aus der Gleichung (1) folgt nothwendig, dass der zu einem beliebigen reellen z gehörige Functionswerth $f(z)$, wenn überhaupt von Null verschieden, positiv sein muss. Setzen wir nämlich in (1) $x = y = z : 2$, so erhalten wir die Gleichung

$$f(z) = \left[f\left(\frac{z}{2}\right)\right]^2;$$

$f(z)$ ist also dem Quadrate einer reellen Zahl gleich, daher nicht negativ.

Setzen wir in der Gleichung (1) $x = 1 \ \ y = 0$, so geht sie in $af(0) = a$ über; es ist mithin $f(0) = 1$. Durch successive Anwendung der Formel (1) ergiebt sich

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n);$$

somit, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ gesetzt wird,

$$f(nx) = [f(x)]^n. \tag{2}$$

Hieraus folgt für $x = 1$

$$f(n) = [f(1)]^n = a^n. \tag{3}$$

Für $x = 1 : n$ ergiebt sich aus (2) die Formel

$$a = f(1) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

Da $f\left(\frac{1}{n}\right)$ eine positive Zahl sein muss, so haben wir also

1) Vgl. Cauchy, Cours d'Analyse 1821, p. 106. Die von Cauchy geforderte Stetigkeit der Function $f(x)$ bei jedem reellen x, welche hier noch nicht in Betracht kommt, kann man durch eine allgemeinere Bedingung ersetzen, s. Nr. 11.

(3*) $$f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$$

zu setzen, unter $\sqrt[n]{a}$ wie bisher die absolute n^{te} Wurzel aus der positiven Zahl a verstanden. Setzt man in (2) statt n eine andere positive ganze Zahl m und hierauf $x = \frac{1}{n}$, so folgt

(4) $$f\left(\frac{m}{n}\right) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Endlich schliesst man aus (1), wenn man $y = -x$ annimmt:

(5) $$f(-x) = f(0) : f(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad f(-n) = \frac{1}{a^n}.$$

Die in den Formeln (3*)—(5) auf der rechten Seite befindlichen Ausdrücke kann man in der That als abhängig vom Exponenten $\pm\frac{m}{n}$ bezeichnen, da zufolge ihrer Definition

$$f\left(\frac{\pm mk}{nk}\right) = f\left(\frac{\pm m}{n}\right),$$

was die ganze positive Zahl k auch sein mag. Wir verstehen somit unter $a^{\frac{m}{n}}$ die m^{te} Potenz der absoluten n^{ten} Wurzel aus a, unter a^0 1, endlich unter $a^{-\mu}$, wo μ eine beliebige positive rationale Zahl sein kann, den reciproken Werth von a^μ d. i. $1 : a^\mu$. Man kann auch setzen $a^{\frac{p}{n}} = (\sqrt[n]{a})^p$, was für eine ganze Zahl p auch sein mag, während n eine positive ganze Zahl bedeutet. Zugleich sehen wir, dass eine jede Function $f(x)$, welche die oben gestellte Aufgabe löst, für alle rationalen Werthe von x vollkommen bestimmt ist.

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass die genannten Ausdrücke wirklich der Relation (1) d. i.

(6) $$a^\mu \cdot a^\nu = a^{\mu+\nu}$$

und auch den übrigen in (I) auf S. 185 verzeichneten Relationen

(7) $$(a^\mu)^\nu = a^{\mu\nu} \qquad (ab)^\mu = a^\mu \cdot b^\mu$$

Genüge leisten, so dass in denselben jetzt μ, ν irgend welche rationale Zahlen sein können. Man nehme zuerst an, es seien μ, ν beide positiv, also

$$\mu = \frac{m}{n} \qquad \nu = \frac{p}{q}.$$

Dann hat man

$$a^\mu = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \qquad a^\nu = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}},$$

somit

$$a^\mu \cdot a^\nu = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\mu+\nu}.$$

Man findet ferner

$$(a^\mu)^\nu = \sqrt[q]{(a^\mu)^p} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a})^{mp}} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\mu\nu}.$$

U. s. f. Sind die Gleichungen (6) (7) für positive rationale Exponenten erwiesen, so hat es keine Schwierigkeit, ihre Giltigkeit für beliebige rationale zu zeigen. Man hat dabei folgende Fälle zu unterscheiden: 1) es sei einer der Exponenten μ, ν Null; 2) $\mu > 0$; $\nu < 0$; 3) $\mu < 0$, $\nu > 0$, 4) $\mu < 0$, $\nu < 0$. So findet man z. B. im letzten Falle

$$a^\mu \cdot a^\nu = \frac{1}{a^{-\mu}} \cdot \frac{1}{a^{-\nu}} = \frac{1}{a^{-(\mu+\nu)}} = a^{\mu+\nu}$$

$$(a^\mu)^\nu = \left(\frac{1}{a^{-\mu}}\right)^\nu = (a^{-\mu})^{-\nu} = a^{\mu\nu} \qquad \text{u. s. f.}$$

Wir setzen ferner fest, dass bei positivem μ $0^\mu = 0$ sei. Erklären wir endlich $(-a)^{\frac{m}{n}}$ bei positivem a und positivem ungeradem n durch die Formel

$$(-a)^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{-a})^m = (-1)^m a^{\frac{m}{n}},$$

so gelten, wie leicht einzusehen, auch für das in dieser Weise erweiterte System von Potenzen mit rationalen Exponenten die Beziehungen (I) auf S. 185.

9. Ungleichungen für Potenzen mit rationalen Exponenten.

a) Für positive rationale Exponenten. Es seien a, b beliebige positive Zahlen.

1) Ist $a > b$, so ist $a^\mu > b^\mu$. (Folgerung aus den Ungleichungen 1) in Nr. 6 und Nr. 2.)

2) Ist $\mu > \nu \geqq 0$, so ist simultan mit $a \gtrless 1$ $a^\mu \gtrless a^\nu$. (Denkt man sich die Exponenten μ ν auf einen gemeinsamen Nenner gebracht, so erhält man diesen Satz sofort aus den Ungleichungen 2) in Nr. 2.)

3) α. „Ist $1 + d > 0$, $(d \gtrless 0)$ so hat man

$$1 + \frac{\mu d}{1+d} < (1+d)^\mu < \frac{1}{1-\mu d}. \tag{8}$$

Der zweite Theil der Relation ist nur richtig, wenn $d < \frac{1}{\mu}$.

Es sei $\mu = \frac{m}{n}$. Nach den Formeln (k) auf S. 192 hat man

$$1 + \frac{d}{n(1+d)} < \sqrt[n]{1+d} < \frac{1}{1-\frac{d}{n}}. \tag{9}$$

Dabei muss rechts $d < n$ sein, was erfüllt ist, wenn $d < 1 : \mu$ ist. Erhebt man zur m^{ten} Potenz, aber unter der Voraussetzung, dass $1 + \frac{d}{n(1+d)} > 0$ sei, so folgt

$$\left\{1 + \frac{d}{n(1+d)}\right\}^m < (1+d)^\mu < \frac{1}{\left(1 - \frac{d}{n}\right)^m},$$

woraus wegen $(1+d_1)^m > 1 + md_1$ sofort die Formeln (8) gewonnen werden. Die erste derselben ist, falls

$$1 + \frac{d}{n(1+d)} < 0,$$

selbstverständlich, da dann auch $1 + \frac{\mu d}{1+d} < 0$ ist.

β. Es ist von Interesse neben (8) noch eine andere Doppelrelation kennen zu lernen, in der die $(1+d)^\mu$ einschliessenden Grenzen näher an die Zahl herantreten. Die Formeln 4) in Nr. 2 und (i) auf S. 191 sind specielle Fälle davon.

„Man hat simultan mit $\mu \lesseqgtr 1$

$$\frac{1}{1 - \frac{\mu d}{1+d}} \lesseqgtr (1+d)^\mu \lesseqgtr 1 + \mu d. \tag{10}$$

Dabei muss, wenn $\mu > 1$, in der ersten Relation $d < \frac{1}{\mu - 1}$ sein, damit der Nenner $1 - \frac{\mu d}{\mu + 1}$ positiv ist."

Wenn $\mu > 1$ ist, so setze man $(1+d)^\mu = (1+d)(1+d)^{\mu-1}$. Daraus ergiebt sich nach (8)

$$(1+d)^\mu > (1+d)\left(1 + \frac{(\mu-1)d}{1+d}\right) = 1 + \mu d. \tag{10*}$$

Und ebenso

$$(1+d)^\mu < \frac{1+d}{1-(\mu-1)d} = \frac{1}{1 - \frac{\mu d}{1+d}},$$

wenn nur der Nenner $1 - (\mu - 1)d$ positiv ist.

Wenn $\mu < 1$, so ist neben $1 + d$ auch $1 + \mu d$ positiv. Also folgt aus (10*), da $\frac{1}{\mu} > 1$,

$$(1+\mu d)^{\frac{1}{\mu}} > 1 + d, \quad \text{also} \quad 1 + \mu d > (1+d)^\mu. \tag{11}$$

Setzt man endlich

$$1 + d = \frac{1}{1 - \frac{d}{1+d}} \quad \text{und} \quad (1+d)^\mu = \frac{1}{\left(1 - \frac{d}{1+d}\right)^\mu}$$

und wendet auf $\left(1 - \frac{d}{1+d}\right)^\mu$ die Beziehung (11) an, so erhält man die weitere:

$$(1+d)^\mu > \frac{1}{1 - \frac{\mu d}{1+d}},$$

da der Nenner positiv ist.

b) Für negative rationale Exponenten. Die hierauf bezüglichen Formeln folgen unmittelbar aus den in a), indem man die reciproken Werthe beider Seiten einer jeden von der letzteren ansetzt.

1) Ist
$$a > b > 0 \quad \mu < 0,$$
so ist $a^\mu < b^\mu$.

2) Sind μ, ν rationale Zahlen und zwar $\mu > \nu$, so ist simultan mit $a \gtrless 1$
$$a^\mu \gtrless a^\nu.$$

3) Unmittelbar aus (8) und (10) folgen für $\mu < 0$, $1 + d > 0$, $d \gtrless 0$

α)
$$1 + \mu d < (1 + d)^\mu < \frac{1}{1 - \frac{\mu d}{1 + d}}. \tag{12}$$

Der zweite Theil der Doppelrelation ist nur richtig, falls der Nenner positiv ist d. h.
$$d > \frac{1}{\mu - 1}.$$

β) Simultan mit $0 > \mu \gtrless -1$ hat man die genaueren Formeln
$$\frac{1}{1 - \mu d} \lesseqgtr (1 + d)^\mu \lesseqgtr 1 + \frac{\mu d}{1 + d}. \tag{12*}$$
Der erste Theil der Doppelrelation ist für $\mu < -1$ nur richtig, wenn
$$d < \frac{1}{\mu}.$$

10. Potenzen mit irrationalen Exponenten.

Satz. „Ist eine irrationale Zahl $\mathfrak{m} = (\varphi_n)$ vorgelegt, wo die Reihe $\varphi_0, \varphi_1 \cdots$ aus rationalen Zahlen besteht, und a eine beliebige positive Zahl, so existirt für die Potenz a^{φ_n} ein positiver Grenzwerth bei $\lim n = +\infty$. Und ist auch $(\psi_n) = \mathfrak{m}$, so hat a^{ψ_n} bei $\lim n = +\infty$ denselben Grenzwerth. Diesen bei allen Darstellungen der irrationalen Zahl $\mathfrak{m} = (\varphi_n)$ sich ergebenden Grenzwerth bezeichnet man mit $a^{\mathfrak{m}}$. — Wenn $\mathfrak{m} > 0$, so findet man ebenso $0^{\mathfrak{m}} = 0$.“[1])

Beweis. Zufolge Annahme erfüllt die Function φ_n folgende Bedingung. Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $a > 0$, derart dass
$$|\varphi_{n+r} - \varphi_n| < \varepsilon \qquad n > \mu \qquad (r = 1, 2 \cdots).$$
Setzt man $a^{\varphi_n} = \Phi_n$, so ist zu untersuchen nach VII. 13
$$\Phi_{n+r} - \Phi_n = a^{\varphi_{n+r}} - a^{\varphi_n} = a^{\varphi_n} \{a^\xi - 1\},$$
worin
$$\xi = \varphi_{n+r} - \varphi_n.$$

1) Bei negativem $\mathfrak{m}$ bleibt $0^{\mathfrak{m}}$ unerklärt, dagegen lässt man $1 : 0^{\mathfrak{m}} = 0$ sein. Weder 0^0, noch $1 : 0^0$ wird erklärt. Vgl. XII. 8.

Es sei zunächst $a > 1$, sodass wenn $a = 1 + d$ gesetzt wird, $d > 0$. Nach Nr. 9 Formel (10) und (12) hat man neben $\xi \gtrless 0$

$$0 \lesseqgtr (1 + d)^{\xi} - 1 \lesseqgtr \xi d,$$

wobei die positiven rationalen Werthe von ξ jedoch die Grenze 1 nicht erreichen dürfen. Es ist demnach

$$|(1 + d)^{\xi} - 1| < d\,|\xi|. \tag{13}$$

Nach dem 1. Satze in VII. 5 giebt es rationale Zahlen ϱ σ, derart, dass für jeden Werth von n $\sigma < \varphi_n < \varrho$, somit $a^{\varphi_n} < a^{\varrho}$ ist. Man findet demnach, dass

$$|\Phi_{n+r} - \Phi_n| < a^{\varrho} d\,|\xi|$$

somit kleiner als eine gegebene Zahl $\varepsilon' > 0$, falls man

$$|\xi| < \varepsilon' : a^{\varrho} d$$

nimmt. Es gehört also zu jeder Zahl $\varepsilon' > 0$ eine Zahl $\mu' > 0$, derart dass

$$|\Phi_{n+r} - \Phi_n| < \varepsilon' \quad \text{für} \quad n > \mu' \qquad (r = 1, 2 \cdots)$$

d. h. die Function Φ_n nähert sich bei unbegrenzt wachsendem n einem endlichen Grenzwerthe. Dass er positiv und nicht etwa 0 ist, folgt daraus, dass

$$\Phi_n > a^{\sigma} \quad \text{ist.}$$

Ist auch $(\psi_n) = \mathfrak{m}$ und $a^{\psi_n} = \Psi_n$, so findet man durch eine ähnliche Entwickelung $(\Phi_n) = (\Psi_n)$. Man braucht nur anzusetzen

$$\Psi_n - \Phi_n = a^{\psi_n} - a^{\varphi_n} = a^{\varphi_n}(a^{\psi_n - \varphi_n} - 1)$$

und zu bemerken, dass nach (13)

$$|\Psi_n - \Phi_n| < a^{\varrho} d\,|\psi_n - \varphi_n|$$

ist und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\mu > 0$ so gehört, dass für $n > \mu$

$$|\psi_n - \varphi_n| < \varepsilon.$$

Wenn $a < 1$ ist, so beachte man, dass

$$a^{\varphi_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-\varphi_n}$$

ist. Der auf der rechten Seite stehende Ausdruck gehört zu den soeben betrachteten.

Es folgt weiter:

„Ist $\mathfrak{m} > 0$, so ist $a^{\mathfrak{m}} \gtrless 1$ simultan mit $a \gtrless 1$; ist $\mathfrak{m} < 0$, so ist simultan mit $a \gtrless 1$

$$a^{\mathfrak{m}} \lesseqgtr 1.“$$

Denn wenn $\mathfrak{m} > 0$, so giebt es nach einer Bemerkung auf S. 151 zwei positive rationale Zahlen σ, μ derart, dass neben $n > \mu$ $\varphi_n > \sigma$, somit, falls $a > 1$ ist,

$$\Phi_n > a^{\sigma} > 1,$$

ist. Man hat also

$$(\Phi_n) \geqq a^\sigma; \quad \text{es ist mithin} \quad (\Phi_n) > 1.$$

U. s. f.

Die Bezeichnung $a^\mathfrak{m}$ für $\lim a^{\varphi_n}$ ist völlig gerechtfertigt, denn es übernimmt diese Zahl durchaus die Rolle der bisher definirten Potenzen. In der That gelten für beliebige reelle Exponenten die Sätze:

1.) $$a^\mathfrak{m} \cdot a^\mathfrak{n} = a^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}. \tag{14}$$

Beim Beweise unterscheide man, ob einer oder keiner der Exponenten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ rational ist. Im letzteren Falle hat man $\mathfrak{m} = (\varphi_n)$, $\mathfrak{m} = (\psi_n)$,

$$a^\mathfrak{m} = \lim a^{\varphi_n}, \qquad a^\mathfrak{n} = \lim a^{\psi_n} \qquad (\lim n = +\infty),$$

also nach VII. 14

$$a^\mathfrak{m} \cdot a^\mathfrak{n} = \lim a^{\varphi_n} \cdot a^{\psi_n} = \lim a^{\varphi_n + \psi_n}.$$

Andererseits ist

$$(\varphi_n) + (\psi_n) = (\varphi_n + \psi_n)$$

und daher

$$\lim a^{\varphi_n + \psi_n} = a^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}.$$

Somit besteht die Formel (14).

(Für $\mathfrak{n} = -\mathfrak{m}$ finden wir aus (14), dass auch hier

$$a^{-\mathfrak{m}} = 1 : a^\mathfrak{m}.) \tag{15}$$

Ist $\mathfrak{m}$ irrational, $\mathfrak{n}$ rational und $= \nu$, so folgt bei $\lim n = +\infty$

$$a^\mathfrak{m} \cdot a^\nu = \lim a^{\varphi_n} \cdot a^\nu = \lim a^{\varphi_n + \nu} = a^{\mathfrak{m}+\nu}.$$

2.) $$a^\mathfrak{m} \cdot b^\mathfrak{m} = (ab)^\mathfrak{m},$$

wo auch $b > 0$ sein soll. Wird ähnlich wie (14) gezeigt.

3.) $$(a^\mathfrak{m})^\mathfrak{n} = a^{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}.$$

Beweis. Wir unterscheiden die drei Fälle, ob $\mathfrak{n}$ eine ganze Zahl p, eine rationale gebrochene oder eine irrationale ist. Im ersten Falle finden wir nach (14) bezw. (15) dass

$$(a^\mathfrak{m})^p = a^{\mathfrak{m}p}$$

ist. Im zweiten Falle [1]) sei $\mathfrak{n} = \frac{p}{q}$, worin q eine positive, p eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Dann hat man einerseits

$$(a^\mathfrak{m})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^\mathfrak{m})^p} = \sqrt[q]{a^{\mathfrak{m}p}},$$

andererseits ist

$$\left(a^{\frac{\mathfrak{m}p}{q}}\right)^q = a^{\frac{\mathfrak{m}p}{q} \cdot q} = a^{\mathfrak{m}p}, \quad \text{somit} \quad a^{\frac{\mathfrak{m}p}{q}} = \sqrt[q]{a^{\mathfrak{m}p}}.$$

---

1) Anderer Beweis. Ist $(\varphi_n) = \mathfrak{m}$, so hat man $(a^{\varphi_n})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{\varphi_n p}{q}}$. Die linke Seite hat nach Uebung 15) S. 225 bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth $\sqrt[q]{a^{\mathfrak{m}p}} = (a^\mathfrak{m})^{\frac{p}{q}}$, die rechte nach dem ‚Satze' S. 204 den Grenzwerth $a^{\frac{\mathfrak{m}p}{q}}$.

Daher ist in der That

$$(a^{\mathfrak{m}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{\mathfrak{m}p}{q}}. \tag{16}$$

Um die Formel 3) im Falle, dass $\mathfrak{n}$ irrational ist, zu beweisen, bedürfen wir noch des folgenden Hilfssatzes:

„Hat die Function $\mathfrak{f}_n$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen (rationalen oder irrationalen) Grenzwerth $\mathfrak{m}$, so ist

$$\lim_{n=+\infty} a^{\mathfrak{f}_n} = a^{\mathfrak{m}}.\text{“}$$

Er ergiebt sich unmittelbar aus der Formel

$$a^{\mathfrak{m}} - a^{\mathfrak{f}_n} = a^{\mathfrak{m}}(1 - a^{\mathfrak{f}_n - \mathfrak{m}}),$$

mit Hilfe der Ungleichungen (13), welche wir sogleich auf irrationale Werthe von ξ ausdehnen werden. Ist dies geschehen, so darf man darin $\xi = \mathfrak{f}_n - \mathfrak{m}$ setzen.

Ist nun $\mathfrak{n} = (\psi_n)$, so hat man nach (16)

$$(a^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{n}} = \lim_{n=+\infty} (a^{\mathfrak{m}})^{\psi_n} = \lim_{n=+\infty} a^{\mathfrak{m}\psi_n}.$$

Und da

$$\lim_{n=+\infty} (\mathfrak{m}\psi_n) = \mathfrak{m}\mathfrak{n},$$

ist, so ergiebt sich mittelst des soeben erwähnten Hilfssatzes

$$\lim_{n=+\infty} a^{\mathfrak{m}\psi_n} = a^{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}; \quad \text{somit ist} \quad (a^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{n}} = a^{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}.$$

Auch die Ungleichungen in Nr. 9 behalten Giltigkeit, wenn die darin vorkommenden Exponenten μ, ν reelle Zahlen überhaupt bedeuten, und zwar in a) positive, in b) negative oder auch beliebige reelle Zahlen. Die Ungleichungen 1) 2) werden nunmehr aus den vorstehenden Formeln 2) und 1) abgeleitet. Was die Ungleichungen 3) betrifft, so wird einer näheren Ausführung nur der Beweis von (8) d. i. der Doppelrelation

$$1 + d > 0 \qquad d \gtrless 0$$

$$(\mathfrak{m} > 0) \qquad 1 + \frac{\mathfrak{m}d}{1+d} < (1+d)^{\mathfrak{m}} < \frac{1}{1-\mathfrak{m}d} \tag{17}$$

bedürfen, da (10) und (12*) daraus durch Schlüsse abgeleitet sind, die von der Natur des Exponenten μ unabhängig sind. Der zweite Theil von (17) ist jedoch nur richtig, wenn

$$1 - \mathfrak{m}d > 0.$$

Es sei wieder $\mathfrak{m} = (\varphi_n)$. Man hat nun, da für $n > \mu$

$$\varphi_n > \varrho > 0,$$

nach (8)

$$1 + \frac{\varphi_n d}{1+d} < (1+d)^{\varphi_n} < \frac{1}{1-\varphi_n d}. \tag{18}$$

In der That darf man, wenn $1 - \mathfrak{m}d > 0$ ist, auch $1 - \varphi_n d$ als positiv ansehen; es ist ja für $n > \mu'$ $\varphi_n < \mathfrak{m} + \varepsilon$, mithin

$$1 - \varphi_n d > (1 - \mathfrak{m}d) - \mathfrak{m}\varepsilon > 0,$$

da man sich $\varepsilon < (1 - \mathfrak{m}d) : \mathfrak{m}$ denken kann.

Aus (18) folgt aber durch den Grenzübergang $\lim n = +\infty$ nach dem in VII. 14 verallgemeinerten 5. Satze von VII. 3 nur

$$1 + \frac{\mathfrak{m}d}{1+d} \leqq (1+d)^{\mathfrak{m}} \leqq \frac{1}{1 - \mathfrak{m}d}. \tag{19}$$

Auf die nämliche Weise, wie (19) aus (8) erhalten wurde, findet man im Falle, dass $0 < \mathfrak{m} < 1$ ist, aus der oberen Doppelrelation (10) die Beziehungen

$$\frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{m}d}{1+d}} \leqq (1+d)^{\mathfrak{m}} \leqq 1 + \mathfrak{m}d; \tag{20}$$

Hierbei ist nur zu bemerken, dass wenn $1 - \mathfrak{m}d > 0$, auch $1 + d - \mathfrak{m}d > 0$ ist. [Bei positivem d versteht sich das von selbst; bei negativem d folgt es daraus, dass $1 + d > 0$ ist.] Nun ist

$$1 + \frac{\mathfrak{m}d}{1+d} < \frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{m}d}{1+d}}, \quad 1 + \mathfrak{m}d < \frac{1}{1 - \mathfrak{m}d};$$

also folgt aus (20) unmittelbar die Doppelrelation (17) für einen irrationalen Exponenten, welcher kleiner als 1 ist. Ist $\mathfrak{m} > 1$, so ergiebt sich dieselbe auf ähnliche Weise aus der unteren Doppelrelation in (10).

11. Bestimmung der eindeutigen Function $f(x)$ durch die Functionalgleichung $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$ und Nebenbedingungen.

Wir kehren jetzt zu der am Eingange von Nr. 8 gestellten Aufgabe zurück. Zunächst geben wir dem die vorige Nr. eröffnenden Satze die folgende Form: „Ist $\mathfrak{m}$ eine irrationale Zahl und zwar $\mathfrak{m} = (\varphi_n)$, so hat $f(\varphi_n)$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth. Wenn auch $(\psi_n) = \mathfrak{m}$ ist, so hat $f(\psi_n)$ bei $\lim n = +\infty$ den nämlichen Grenzwerth.“ Es ist indess willkürlich, diesen Grenzwerth, welchen wir oben mit $a^{\mathfrak{m}}$ bezeichnet haben, als den Werth $f(\mathfrak{m})$ anzusetzen. Will man auch die Gleichung $f(\mathfrak{m}) = a^{\mathfrak{m}}$ mit Nothwendigkeit herbeiführen, so muss man $f(x)$ einer weiteren Bedingung unterwerfen. Cauchy fordert a. a. O. die Stetigkeit der Function $f(x)$ bei jedem endlichen Werthe von x. Es genügt jedoch auch eine einfachere Annahme über $f(x)$.

Satz.[1]) „Unterwirft man die für jeden reellen Werth von x

1) Nach der scharfsinnigen Bemerkung, welche Darboux (Math. Ann. XVII S. 56) über die Functionalgleichung

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y)$$

gemacht hat (vgl. S. 224).

eindeutig erklärte Function $f(x)$ den drei Bedingungen: 1) dass für irgend zwei reelle Werthe x, y

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) \tag{1}$$

ist, 2) dass es mindestens ein Intervall von x, etwa von $x=c$ bis zu $x=c+d$ $(d>0)$, giebt, zu dessen Werthen Functionswerthe $f(x)$ gehören, welche zwischen den nämlichen positiven Zahlen A, B liegen, 3) dass $f(1)$ eine gegebene positive Zahl a ist; so fällt $f(x)$ durchaus mit der Exponentialfunction a^x, wie sie in den Nrn. 8 und 10 erklärt ist, zusammen d. i. es ist $f(x) = a^x$."

Beweis. In Nr. 8 haben wir aus der 1. und 3. Bedingung abgeleitet, dass für rationale x $f(x) = a^x$ sein muss. Setzen wir

$$f(x) : a^x = g(x),$$

so ist mithin für jedes rationale x $g(x) = 1$. Durch die Substitutionen $f(x) = a^x g(x)$, $f(y) = a^y g(y)$, $f(x+y) = a^{x+y} g(x+y)$ erhält man aus (1), da $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ist, die Formel

$$g(x)\, g(y) = g(x+y). \tag{2}$$

Lassen wir hier y einen rationalen Werth η sein, so dass $g(\eta) = 1$ ist, so finden wir

$$g(x+\eta) = g(x). \tag{3}$$

Die Function $g(x)$ hat also für je zwei Werthe des Argumentes, deren Unterschied eine rationale Zahl ist, den nämlichen Werth.

Daraus können wir folgern, dass wenn man x auf das beliebig zu wählende Intervall von $x=c$ bis zu $x=c+d$ beschränkt, die Function $g(x)$ in demselben alle Werthe annimmt, deren sie überhaupt fähig ist. Denn ist x' eine beliebige irrationale Zahl und δ eine positive rationale Zahl kleiner als d, so giebt es nach dem letzten Satze in VII. 10 eine solche ganze Zahl p, dass

$$p\delta \leqq x' - c < (p+1)\delta \quad \text{oder} \quad c \leqq x' - p\delta < c + \delta$$

ist. Aus (3) ergiebt sich aber durch die Annahme $x = x' - p\delta$ $\eta = p\delta$ die Gleichung $g(x') = g(x' - p\delta)$.

Und nun ist aus der zweiten der Function $f(x)$ auferlegten Bedingung leicht zu entnehmen, dass kein Werth von $g(x)$ von 1 verschieden sein kann. Angenommen, es sei b ein Werth im Intervalle von $x=c$ bis zu $x=c+d$, wofür die positive Zahl $g(b)$ von 1 verschieden ist. Wenn $\mu = m:n$ eine rationale Zahl bezeichnet, so gelangen wir durch Ueberlegungen, welche den in Nr. 8 über die Function $f(x)$ angestellten vollkommen entsprechen, zu der Formel

$$g\left(\frac{m}{n}b\right) = \sqrt[n]{g(b)^m} \quad \text{d. i.} \quad g(\mu b) = [g(b)]^\mu.$$

Je nachdem nun $g(b)$ grösser oder kleiner als 1 wäre, würde $g(\mu b)$,

dadurch, dass man μ gross genug nimmt, über die Zahl B wachsen, oder unter die Zahl A sinken. Dies ergiebt sich sofort durch einen Blick auf die unteren Ungleichungen (10) auf S. 203. Da aber $g(x)$ auch für ein x zwischen c und $c+d$ gleich $g(\mu b)$ sein müsste, so ist dies unmöglich. Folglich giebt es keinen solchen Werth b, dass $g(b) \gtrless 1$ ist.

Mithin ist für jedes reelle x $g(x)=1$ d. h. $f(x)=a^x$.

12. Die Logarithmen.

Satz. „Wenn a und b positive Zahlen bedeuten, die erstere von 1 verschieden, so giebt es stets eine und nur eine Zahl x, welche der Gleichung $a^x = b$ genügt."

Beweis. Es sei zuerst $a > 1$. Dann wächst a^x zugleich mit x und zwar über jede endliche Zahl, denn nach Nr. 10 ist

$$a^x > 1 + x(a-1)$$

für $x > 1$. Ist $x < 0$, so ist $a^x < 1$ und zwar sinkt a^x unter jede positive Zahl, was man aus der Umformung $a^x = 1 : a^{-x}$ zufolge des soeben Bemerkten unmittelbar erkennt. Daraus folgt, dass es eine ganze Zahl $c_0 \gtreqless 0$ geben muss, derart, dass entweder $a^{c_0} = b$ oder

$$a^{c_0} < b < a^{c_0+1}.$$

Im ersten Falle ist $x = c_0$ eine Auflösung der Gleichung $a^x = b$. Im zweiten Falle bilde man, unter e eine positive ganze Zahl $\geqq 2$ verstanden, die Potenzen

$$a^{c_0+\frac{1}{e}}, \quad a^{c_0+\frac{2}{e}} \cdots a^{c_0+\frac{e-1}{e}}.$$

Sodann ergiebt sich, dass eine ganze Zahl c_1

$$0 \leqq c_1 \leqq e-1$$

existiren muss, derart dass entweder

$$a^{c_0+\frac{c_1}{e}} = b$$

oder

$$a^{c_0+\frac{c_1}{e}} < b < a^{c_0+\frac{c_1+1}{e}}.$$

Im ersten Falle ist eine Auflösung, nämlich

$$x = c_0 + \frac{c_1}{e},$$

unserer Gleichung gefunden. Im zweiten theilen wir das Intervall $\frac{1}{e}$ neuerdings in e gleiche Theile, wodurch eine ähnliche Disjunction zu Tage tritt. U. s. f. Das Ergebniss dieser Betrachtung wird folgendes sein. Entweder existirt eine rationale Zahl von der bestimmten Form

$$x = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_m}{e^m},$$

welche die Gleichung $a^x = b$ befriedigt, oder wir erhalten eine unbegrenzte Reihe von ganzen Zahlen $c_0, c_1, c_2 \cdots$, worin von c_1 an alle Ziffern sind, d. i. einen der Werthe von 0 bis $e-1$ besitzen, von der Eigenschaft, dass, wie gross auch der Zeiger n sein mag, stets

$$a^{S_n} < b < a^{S_n + \frac{1}{e^n}}.$$

Dabei ist

$$S_n = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots + \frac{c_n}{e^n}.$$

Und es ist leicht zu zeigen, dass für die Zahl

$$x = (S_n) \qquad a^x = b$$

ist. Da jetzt

$$S_n < x < S_n + \frac{1}{e^n},$$

also

$$a^{S_n} < a^x < a^{S_n + \frac{1}{e^n}},$$

so hat man

$$|a^x - b| < a^{S_n + \frac{1}{e^n}} - a^{S_n} = a^{S_n}\left(a^{\frac{1}{e^n}} - 1\right),$$

also zufolge der Formel (10) S. 203

$$|a^x - b| < b(a-1)\frac{1}{e^n}.$$

Da man nach S. 92 n so annehmen kann, dass $1 : e^n$ kleiner ist als $\varepsilon : b(a-1)$, so ist $|a^x - b|$ kleiner als jede positive Zahl ε d. i. es ist

$$a^x = b.$$

Dass es nur eine Zahl x geben kann, wofür $a^x = b$, folgt daraus, dass für $x' \gtrless x$ simultan $a^{x'} \gtrless a^x$. — x ist positiv, wenn $b > 1$; negativ, wenn $b < 1$. Die Gleichung $a^x = 1$ hat nur die Lösung $x = 0$.

Ist $0 < a < 1$, so ist $\frac{1}{a} > 1$, also existirt eine und nur eine Zahl x_1, derart, dass

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} = b,$$

somit

$$a^{-x_1} = b.$$

Man hat also für $x = -x_1$

$$a^x = b.$$

Man nennt die der Gleichung $a^x = b$ genügende Zahl x den Logarithmus[1]) der positiven Zahl b in Beziehung auf die Basis a:

$$x = {}^a\log b.$$

---

1) Logarithmus bedeutet nach Klügel (Math. Wörterbuch III S. 482) Verhältnisszahl, indem man in früherer Zeit das Verhältniss $(A : B)^m$ als das

Hierbei reicht es jedoch aus, der Basis einen bestimmten positiven, von 1 verschiedenen Werth B zu ertheilen. Denn hat man die Zahlen ${}^B\log a$, ${}^B\log b$ ermittelt, so folgt aus

$$\text{(a)} \qquad b = a^x = B^{x\,{}^B\log a}, \quad x\,{}^B\log a = {}^B\log b, \quad x = {}^a\log b = \frac{{}^B\log b}{{}^B\log a}.$$

Für B sind gegenwärtig nur zwei Annahmen üblich. Entweder setzt man $B = 10$ als der Basis des dekadischen Zahlensystemes oder nimmt für B eine gewisse irrationale Zahl e, die mit den Stellen 2,7182818284 beginnt und auf S. 216 erklärt werden wird. Die zur Basis 10 gehörigen Logarithmen heissen gemeine oder nach ihrem ersten Berechner Briggische Logarithmen; die zur Basis e gehörigen natürliche, Neperische[1]) oder hyperbolische[2]) Logarithmen. Wir gebrauchen für die ersteren die Abkürzung log, für die letzteren l, so dass

$$10^{\log b} = b \qquad e^{lb} = b.$$

Aus (a) folgt bei Vertauschung von a, B mit B, e

$$^B\log b = \frac{lb}{lB} = Mlb,$$

worin die Constante $M = 1 : lB = {}^B\log e$ als Modulus des zur Basis B gehörigen Logarithmensystemes bezeichnet wird. Es gilt mithin die Regel: „Aus dem natürlichen Logarithmus erhält man den zur Basis B gehörigen, indem man ihn mit dem B entsprechenden Modulus multiplicirt.“ Man hat also

$$e^{\frac{1}{M}} = B,$$

oder

$$e = B^M,$$

somit auch

$$M = {}^B\log e.$$

Je nachdem die Basis eines Logarithmensystemes grösser oder kleiner als 1 ist, ist sein Modulus positiv oder negativ. Der Modulus des Briggischen Systems ist $0{,}4342944819 \cdots$.

Wenn die Decimalzahl b nicht eine ganze Potenz von 10 ist, so

---

m-fache des Verhältnisses $(A : B)$ bezeichnete (vgl. Note auf S. 131). Den Namen „Logarithmus“ hat Neper (Lord John Napier) in seiner „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“ (1614) eingeführt. Vgl. Cantor, Gesch. d. Math. II. S. 666 f. Die i. T. stehende allgemeine Erklärung des Logarithmus findet sich in Euler's Introductio in Analysin infin. (1748) I. § 102.

1) Nicht ganz mit Recht. Bezeichnet man nämlich den Neper'schen Logarithmus einer Zahl b mit $\log\text{nep}\, b$, so hat man bloss bis auf Glieder von der Ordnung 10^{-7}

$$\log\text{nep}\, b = 10^7 l\left(\frac{10^7}{b}\right). \quad \text{(Vgl. S. 225.)}$$

2) Weil diese Logarithmen bei der Quadratur der Hyperbel auftreten.

besteht ihr gemeiner Logarithmus aus der ganzen Zahl c_0 — der Charakteristik — und einem positiven echten Decimalbruche, Mantisse genannt. Ist $b > 1$, so ist c_0 gleich der um 1 verminderten Anzahl der Ziffern vor dem Komma; ist $b < 1$, der negativen Anzahl der Nullen vor der ersten geltenden Ziffer. Die gemeinen Logarithmen der natürlichen Zahlen, welche nicht Potenzen von 10 sind, sind irrational, da jede gebrochene Potenz von 10 irrational ist.

Briggs berechnete die gemeinen Logarithmen der natürlichen Zahlen b nach dem oben angegebenen Verfahren, $a = 10$ $e = 2$ gesetzt. Hierbei kommt man mit successiven Ausziehungen von Quadratwurzeln aus:

$$\sqrt{10} = w_1, \quad \sqrt{w_1}, \quad \sqrt{10 w_1},$$

u. s. f.[1]) Einfacher gestaltet sich die Arbeit, wenn man zunächst durch fortgesetztes Ausziehen der Quadratwurzel

$$\sqrt{10}, \quad \sqrt[4]{10}, \quad \sqrt[8]{10} \cdots$$

berechnet und b auf das Intervall (0,10) einschränkend, vermittelst aufeinander folgender Divisionen die Ziffern $c_1, c_2 \cdots$ bestimmt. Ist z. B. $\sqrt{10} < b < 10$, also $c_1 = 1$, so dividire man b durch $\sqrt{10}$. Je nachdem der Quotient kleiner oder grösser als $\sqrt[4]{10}$, hat man $c_2 = 0$ oder 1 u. s. f. — Auf ähnliche Art kann man die gemeinen Logarithmen als Decimalbrüche berechnen mittelst einer Tafel der Potenzen von 10 zu den Exponenten

$$\frac{1}{10^n}, \quad \frac{2}{10^n} \cdots \frac{9}{10^n} \qquad (n = 1, 2 \cdots).^{2})$$

Weitere Methode zur Berechnung eines gemeinen Logarithmus s. IX. 20.

Die Briggischen Logarithmen der Decimalzahlen sind den Logarithmentafeln zu entnehmen. Die gebräuchlichsten Tafeln sind wohl: Die siebenstelligen von v. Vega und von Schrön, die sechsstelligen von Bremiker, die fünfstelligen von Gernerth und von Schubert, die vierstelligen von Bremiker und von v. Oppolzer. — Die Gernerth'schen Tafeln sind die einzigen fünfstelligen, in welchen die Argumente der Logarithmen der trigonometrischen Functionen von 10 zu 10 Bogensecunden fortschreiten.

13. Allgemeine Eigenschaften der Logarithmen.

1) Der Logarithmus eines Productes ist gleich der Summe der Logarithmen der Factoren.

---

1) Vgl. Klügel a. a. O. III. S. 550.

2) Eine Tafel solcher Potenzen von 10 berechnete Kramp durch Ausziehen von Quadrat- und fünften Wurzeln. Correcter ist nach Gernerth (Fünfstellige gem. Logarithmen S. V) die Tafel im Handbuche der allgemeinen Arithmetik von Egen, welche G. in sein Werk aufgenommen hat. Zur Berechnung solcher Tafeln würde sich die unendliche Reihe für a^x in IX. 14 zu $a = 10$ eignen, welche bloss die Kenntniss von $l\,10$ voraussetzt.

Ist

$$P = b_1 b_2 \cdots b_p$$

und

$$B^{x_r} = b_r \qquad (r = 1, 2 \cdots p),$$

so hat man

$$x_r = {}^B\log b_r$$

und

$$P = B^{x_1 + x_2 + \cdots + x_p},$$

somit

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = {}^B\log P.$$

2) Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz: Logarithmus des Zählers weniger Logarithmus des Nenners.

Ist

$$P = b : c, \qquad B^x = b, \qquad B^y = c,$$

so folgt

$$P = B^{x-y} \qquad {}^B\log P = x - y = {}^B\log b - {}^B\log c.$$

3) Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Producte des Logarithmus der Basis mit dem Exponenten.

Für $P = b^c$ folgt $P = B^{xc}$, also

$$^B\log P = xc = c \cdot {}^B\log b.$$

Setzt man $c = 1 : m$ (m natürliche Zahl), so erhält man den Satz: „Der Logarithmus der m^{ten} Wurzel aus einer positiven Zahl b ist gleich dem Logarithmus von b dividirt durch den Wurzelexponenten m."

4) Zur grösseren von zwei positiven Zahlen gehört der grössere Logarithmus, wenn die Basis $B > 1$. — Ist $b > c > 0$, so hat man

$$^B\log b > {}^B\log c;$$

denn wäre

$$^B\log b \leqq {}^B\log c,$$

so würde, da $B > 1$, folgen

$$b \leqq c.$$

14. Eine analytische Darstellung der Exponentialfunction e^x.[1]) — Unter analytischer Darstellung einer eindeutigen Function von x versteht man einen für jeden Werth von x, wofür sie überhaupt erklärt ist, giltigen Ausdruck derselben. Was die Function e^x, wo e die in Nr. 12 erwähnte Irrationalzahl bedeutet, betrifft, so haben wir bisher in Nr. 8 und 10 zwei ganz verschieden gebaute Formeln kennen ge-

1) Die Formeln (1) in Nr. 14 und (24) in Nr. 15 giebt Euler in der Introductio etc. I. § 125. Cauchy handelt über die erstere Oeuvres 2. sér. X. S. 62 und 134. Einen dem i. T. gegebenen ähnlichen Beweis beider Formeln hat Th. Wulf (Monatshefte f. Math. VIII. Bd. S. 43) geführt. — Nr. 14 ist unentbehrlich als Vorbereitung auf die Cauchy-Schlömilch'sche Erklärung der Potenz mit complexem Exponenten in XII. 5.

lernt, wovon die eine ihre Werthe für ein rationales, die andere für ein irrationales x giebt. Man kennt aber auch analytische Darstellungen derselben. Eine solche bietet die Formel

$$e^x = \lim_{n=+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \tag{1}$$

welche für jeden Werth von x gilt. n bezeichnet, wie immer, jede natürliche Zahl.

Um die Gleichung (1) zu beweisen, genügt es nicht, die Potenz auf der rechten Seite nach dem binomischen Satze zu entwickeln. Denn wir erhalten so eine Summe von $(n+1)$ Gliedern, deren Anzahl somit von n abhängt, und sind daher nicht in der Lage, das Cor. 4 in VII. 3 oder dessen Verallgemeinerung in VII. 14 anzuwenden. Durch directe Untersuchung des Ausdruckes

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{2}$$

und Benützung des Satzes in Nr. 11 lässt sich indess dieses Ziel erreichen.

1. Satz. „Der Ausdruck (2) nimmt von einem bestimmten Werthe des n an mit wachsendem n beständig zu, bleibt jedoch dabei stets unter einer festen Zahl. Er hat somit bei $\lim n = +\infty$ einen positiven endlichen Grenzwerth, den wir mit $f(x)$ bezeichnen können.“

Beweis. Wir haben, wenn μ eine positive rationale Zahl grösser als 1 bedeutet und $1 + u : \mu$ positiv, also $\mu > -u$ ist, nach einer der unteren Ungleichungen (10) auf S. 203

$$1 + u < \left(1 + \frac{u}{\mu}\right)^\mu. \tag{3}$$

Ist ausserdem $u < 1$, so finden wir nach den Formeln (8) S. 202

$$\left(1 + \frac{u}{\mu}\right)^\mu < \frac{1}{1-u}. \tag{4}$$

Setzt man $\mu = n : m$, unter m, n natürliche Zahlen verstanden, wovon die erstere die kleinere ist, und $u = x : m$, mit x eine beliebig reelle Zahl bezeichnet, so ergiebt sich, wenn $n > -x$ ist, aus (3)

$$1 + \frac{x}{m} < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \tag{5}$$

und wenn ausserdem $m > x$ ist, aus (4)

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{m}} < \frac{1}{1 - \frac{x}{m}}. \tag{6}$$

Erhebt man die Ungleichung (5) zur m^{ten} Potenz, so erhält man die Beziehung

$$(-x < m < n) \qquad \left(1+\frac{x}{m}\right)^m < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \tag{7}$$

aus welcher ersichtlich ist, dass der Ausdruck (2) von einem bestimmten Werthe von n an mit wachsendem n beständig zunimmt. Insbesondere hat man

$$(1-x < n) \qquad \left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{8}$$

Erhebt man dagegen die Ungleichung (6) zur m^{ten} Potenz, so erfährt man, dass neben

$$\begin{pmatrix} -x < m < n \\ x < m \end{pmatrix} \qquad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \frac{1}{\left(1-\frac{x}{m}\right)^m} \tag{9}$$

ist. D. i. wählt man eine natürliche Zahl m grösser als $|x|$, so liegt der Ausdruck (2) für jeden Werth von $n > m$ unter

$$1 : \left(1-\frac{x}{m}\right)^m = \left(\frac{m}{m-x}\right)^m.$$

Daraus und aus der Beziehung (8) folgt nach dem letzten Satze in VII. 14, dass der Ausdruck (2) bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth hat, den wir mit $f(x)$ bezeichnen wollen. — Demnach ist

$$f(1) = \lim_{n=+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{9*}$$

Dies ist die in Nr. 12 mit e bezeichnete Zahl. Wir entnehmen aus (8), dass die Function

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

von dem Werthe $n = 1$ an mit n beständig wächst. Somit ist $e > 2$ (S. 167). Aus der Ungleichung (9) ergiebt sich, wenn man $x = 1$, $m = 2$ setzt und n ins Unendliche wachsen lässt, dass $e \leqq 4$ ist. (Nach der Verallgemeinerung des 5. Satzes in VII. 3.)[1])

Für diese Function besteht das Additionstheorem

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y), \tag{10}$$

was sich leicht mit Hilfe des nachstehenden Satzes zeigen lässt.

2. Hilfssatz.[2]) „Wenn die eindeutige Function $w(n)$ von n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth Null hat, so ist

$$\lim_{n=+\infty} \left(1+\frac{w(n)}{n}\right)^n = 1.\text{“} \tag{11}$$

Beweis. Zufolge der Ungleichungen (4) auf S. 186 hat man, $d = w(n) : n$ $m = n$ gesetzt,

1) Ueber die Berechnung und die Irrationalität der Zahl e vgl. IX. 14.

2) Cauchy, Exercices d'Analyse IV. S. 239. Daselbst auch der 3. Satz nebst seinen Beweisen.

$$1 + w(n) < \left(1 + \frac{w(n)}{n}\right)^n < \frac{1}{1 - \frac{w(n)}{1 + \frac{w(n)}{n}}}. \tag{12}$$

Hierbei genügt es, n sich so gross zu denken, dass $w(n)$ zwischen -1 und $+1$ liegt. Aus (12) folgt, dass

$$w(n) < \left\{1 + \frac{w(n)}{n}\right\}^n - 1 < \frac{w(n)}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) w(n)}$$

ist. Also ist

$$\left|\left\{1 + \frac{w(n)}{n}\right\}^n - 1\right| < \frac{|w(n)|}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) |w(n)|}. \tag{13}$$

Der Zähler des Bruches auf der rechten Seite von (13) hat zufolge der Voraussetzung bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0, der Nenner somit den Grenzwerth 1; demnach hat der Bruch selbst bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0. Daher ist auch

$$\lim_{n=+\infty} \left[\left\{1 + \frac{w(n)}{n}\right\}^n - 1\right] = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

3. Satz. „Ist

$$\lim_{n=+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = f(x),$$

so besteht, was x und y auch für reelle Werthe sein mögen, zwischen $f(x)$, $f(y)$, $f(x+y)$ die Beziehung (10)."

Wir haben nämlich

$$\frac{f(x) \cdot f(y)}{f(x+y)} = \lim_{n=+\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right) : \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)\right]^n. \tag{14}$$

Der Ausdruck innerhalb der Klammern lässt sich auf die Form

$$1 + \frac{1}{n} \frac{xy}{n + x + y}$$

bringen. Da nun

$$\lim_{n=+\infty} \{xy : (n + x + y)\} = 0$$

ist, so dürfen wir in der Formel (11)

$$w(n) = xy : (n + x + y)$$

setzen und erfahren dadurch, dass der Grenzwerth auf der rechten Seite von (14) gleich 1 ist. Also ist

$$f(x) \cdot f(y) : f(x+y) = 1.$$

Um jetzt den Satz in Nr. 11 anwenden zu können, bemerken wir noch, dass wenn wir x auf die Werthe von $x = 0$ bis zu $x = 1$ einschränken, dann die Werthe von $f(x)$ das Intervall von 1 bis 4 nicht verlassen. Denn neben $0 \leqq x \leqq 1$ ist einerseits $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geqq 1$, somit auch $f(x) \geqq 1$; andererseits zufolge (9) (bei $m = 2$)

$$f(x) \leqq 1 : \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \leqq 4.$$

Da ferner $f(1) = e$ ist, so gelangen wir nunmehr zur Formel (1).

4. Corollar. „Für jeden Werth von x ausser 0 ist

$$e^x > 1 + x.\text{“} \tag{a}$$

Wenn man in den Ungleichungen (10) auf S. 203 $d = e - 1$ und $\mu = x$ setzt, so wird man die Beziehung (a) nur für jeden Werth von x grösser als 1 erhalten. Der allgemeine Beweis derselben stützt sich auf den 1. Satz S. 215. Daraus folgt nach dem letzten Satze in VII. 14, dass

$$e^x > \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

ist. Kraft der Beziehung 4) S. 186 hat man aber

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x.$$

Mithin ist

$$e^x > 1 + x.$$

Damit ist die Beziehung (a) vollständig erwiesen. Setzt man in ihr statt x $-x$, so erhält man

$$e^{-x} > 1 - x.$$

Daher ist

$$e^x < \frac{1}{1 - x}, \tag{b}$$

wobei jedoch $x < 1$ sein muss.

5. Satz (in XII. 5 benutzt). „Hat die Function $v(n)$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth α, so ist

$$\lim_{n=+\infty} \left(1 + \frac{v(n)}{n}\right)^n = e^\alpha.\text{“} \tag{c}$$

Beweis. Setzt man $v(n) = \alpha + \omega(n)$, so ist $\lim\limits_{n=+\infty} \omega(n) = 0$. Ferner hat man

$$1 + \frac{v(n)}{n} = 1 + \frac{\alpha + \omega(n)}{n} = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{\omega(n)}{1 + \frac{\alpha}{n}}\right),$$

$$\left(1 + \frac{v(n)}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{\omega(n)}{1 + \frac{\alpha}{n}}\right)^n.$$

Bei $\lim n = +\infty$ hat der erste Factor zufolge (1) den Grenzwerth e^α, der zweite zufolge des 2. Satzes den Grenzwerth 1, da

$$\lim_{n=+\infty} \frac{\omega(n)}{1 + \alpha : n} = 0$$

ist. Somit besteht die Formel (c).

15. Eine analytische Darstellung des natürlichen Logarithmus. Aus der Gleichung

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = a \qquad (a > 0), \tag{15}$$

worin n eine natürliche Zahl sein soll, erhält man

$$x = n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

Da die linke Seite der Gleichung (15) bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth e^x besitzt, so entsteht die Vermuthung, dass der Ausdruck

$$g(n) = n(\sqrt[n]{a} - 1) \qquad (a > 0), \tag{16}$$

bei demselben Grenzübergange la zum Grenzwerthe haben wird. Sie lässt sich leicht zur Gewissheit erheben.[1])

1. Satz. „Die Function $g(n)$ nimmt bei wachsendem n beständig ab, bleibt aber dabei über einer festen (von n unabhängigen) Zahl. Demnach hat $g(n)$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth, den wir vorläufig mit $h(a)$ bezeichnen. Dabei ist $h(a) < g(n)$. — $h(a)$ ist positiv oder negativ, je nachdem a grösser oder kleiner als 1 ist."

Beweis. Wir bilden $g(n) - g(n+1)$, wobei wir die Zahl

$$\sqrt[n(n+1)]{a} = b$$

einführen. Alsdann ist

$$g(n) - g(n+1) = n\{b^{n+1} - 1\} - (n+1)(b^n - 1) = nb^n(b-1) - (b^n - 1). \tag{17}$$

Nehmen wir zunächst an, dass $a > 1$ ist. Dann ist auch $b > 1$. Setzen wir nun

$$g(n) - g(n+1) = (b-1)\left\{nb^{n-1}(b-1) + \left[nb^{n-1} - \frac{b^n - 1}{b-1}\right]\right\},$$

so erkennen wir vermittelst der 3. Ungleichung in Nr. 2 unmittelbar, dass $g(n) - g(n+1)$ positiv, somit für jeden der Werthe

$$n = 1, 2 \cdots \quad g(n) > g(n+1) \tag{18}$$

ist. Dabei ist zufolge der Ungleichung (1) in Nr. 6

$$g(n) > 0. \tag{19}$$

Die beiden letzten Ungleichungen gestatten die Anwendung des Schlusssatzes in VII. 14, aus dem auch die Ungleichung

$$h(a) < g(n)$$

folgt. — Aus der Ungleichung (19) ergiebt sich durch den Grenzübergang $\lim n = +\infty$ bloss die Beziehung $h(a) \geqq 0$. Um zu zeigen, dass $h(a)$ positiv ist, setzen wir $a = 1 + d$ $(d > 0)$ und wenden die erste der Ungleichungen (i) auf S. 191 an, wodurch wir unmittelbar finden, dass

$$g(n) > \frac{d}{1+d} : \left(1 - \frac{d}{n(1+d)}\right) \tag{20}$$

1) In der Note zu IX. 18 werden wir die Formel (24) auf eine andere Art begründen.

ist. Daraus folgt nun bei $\lim n = +\infty$ die Beziehung

$$h(1+d) \geqq \frac{d}{1+d}.$$

Demnach ist $h(a)$ gewiss positiv.

Auch im Falle dass $a < 1$ ist, leiten wir aus der Formel (17) durch eine naheliegende Ungleichung die Umformung (18) ab. Die Formel (20) zeigt, dass wenn $0 > d > -1$ ist,

$$g(n) > \frac{d}{1+d}$$

ist. Wir können somit wieder den oben erwähnten Satz anwenden. — Nunmehr ist $g(n)$ negativ. Da nach der zweiten der Ungleichungen (i) auf S. 191

$$g(n) < d \tag{21}$$

ist, so finden wir $h(1+d) \leqq d$; es ist somit jetzt $h(a)$ negativ.

2. Satz. „Es ist $h(a) + h(a') = h(aa')$." (22)

Folgt aus der Identität

$$n\{\sqrt[n]{aa'} - 1\} - n(\sqrt[n]{a} - 1) - n(\sqrt[n]{a'} - 1) = n(\sqrt[n]{a} - 1)(\sqrt[n]{a'} - 1)$$

durch den Grenzübergang $\lim n = +\infty$ unmittelbar. Es ist nämlich nach der Formel (13) auf S. 205

$$\lim_{n=+\infty} \sqrt[n]{a'} = 1.$$

Aus (22) folgt die Formel

$$h(a) + h(1:a) = 0. \tag{23}$$

3. Satz. „Es ist $e^{h(a)} = a$, also $h(a) = la$ d. i.

$$\lim_{n=+\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = la." \tag{24}$$

B e w e i s. Zufolge der Formeln (15) und (16) ist

$$\left(1 + \frac{g(n)}{n}\right)^n = a.$$

Ferner haben wir, wenn wir für $h(a)$ kurz h schreiben, nach (1)

$$e^{h(a)} = \lim_{n=+\infty} \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n.$$

Somit ist

$$a - e^{h(a)} = \lim_{n=+\infty} \left\{\left(1 + \frac{g(n)}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n\right\}.$$

Können wir nun zeigen, dass der Grenzwerth rechts verschwindet, so ergiebt sich aus dieser Formel die Gleichung

$$a = e^{h(a)}.$$

Da $g(n) > h$ ist, so ist

$$1 + \frac{g(n)}{n} > 1 + \frac{h}{n}.$$

Nehmen wir zuerst wieder $a > 1$ an, so ist $h > 0$, also $1 + h : n > 1$ und somit

$$\chi(n) = \left(1 + \frac{g(n)}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n > 0.$$

Andererseits haben wir nach der zweiten der Ungleichungen (3) in Nr. 2

$$\chi(n) < \left(1 + \frac{g(n)}{n}\right)^{n-1} (g(n) - h).$$

Zufolge der Formel (21) und des 1. Satzes in Nr. 14 finden wir

$$\left(1 + \frac{g(n)}{n}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{d}{n}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{d}{n}\right)^n < e^d.$$

Demnach ist

$$\chi(n) < e^d (g(n) - h).$$

Da nun nach dem 1. Satze $g(n)$ bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth h hat, so ist mithin

$$\lim_{n=+\infty} \chi(n) = 0.$$

Ist $a < 1$, so ist $1 : a > 1$. Nun ist nach (23)

$$e^{h(a)} = e^{-h(1\ a)} = 1 : e^{h(1:a)},$$

also, da nach dem soeben Bemerkten $e^{h(1:a)} = 1 : a$ ist, wieder

$$e^{h(a)} = 1 : (1 : a) = a.$$

Uebungen zum VIII. Abschnitt.

1) Man zeige, dass wenn x und x' von a verschieden sind,

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{a-x'} + \frac{x-x'}{(a-x')^2} + \cdots + \frac{(x-x')^{n-1}}{(a-x')^n} = \frac{1}{x-a}\left(\frac{x-x'}{a-x'}\right)^n$$

ist. Besonderer Fall $x' = 0$.

2) Die Reihe $1 + 2a + 3a^2 + \cdots + na^{n-1}$ zu summiren im Falle, dass a von 1 verschieden ist. (Multiplicire sie mit $1 - a$.)

Desgleichen nacheinander die Reihen

$$1 + \binom{m+1}{m} a + \binom{m+2}{m} a^2 + \cdots + \binom{n}{m} a^{n-m} \qquad (m = 2, 3 \cdots).$$

Hieran schliesst sich die Formel

$$1 + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$

welche durch sinngemässe Anwendung der Formel (c) auf S. 187 auf die beiden ersten Glieder, dann auf deren Summe und das dritte Glied u. s. w. erhalten wird.

3) Die Reihe

$$1 + (a+b) + (a^2 + ab + b^2) + \cdots + (a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

zu summiren, falls a und b von einander und von 1 verschieden sind.

4) „Ist $0 < a < 1$ und k eine natürliche Zahl, so hat man

$$1 - a + a^2 - \cdots - a^{2k-1} < \frac{1}{1+a}, \quad 1 - a + a^2 - \cdots + a^{2k} > \frac{1}{1+a}.\text{“}$$

Der Satz ergiebt sich sofort aus der Formel (III) auf S. 186, indem man darin statt a $-a$ schreibt und $b = 1$, $m = 2k$ oder $2k + 1$ setzt.

5) Man berechne auf 15 Stellen mit Berücksichtigung der Correctur

$$\text{a)}\ \frac{1}{199} \qquad \text{b)}\ \frac{1}{2001}.$$

Und zwar bediene man sich bezüglich des ersteren Bruches der aus der Formel (IV) auf S. 186 folgenden Gleichung

$$\frac{1}{199} = \frac{1}{200 - 1} = \frac{1}{200} + \left(\frac{1}{200}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{200}\right)^m + \frac{1}{199}\left(\frac{1}{200}\right)^m$$

und bezüglich des letzteren einer ähnlichen aus der Formel

$$\frac{1}{2001} = \frac{1}{2000 + 1}$$

hervorgehenden Gleichung.

6) Sind a und b positive Zahlen, so hat man

$$\sqrt{a^2 - 2ab^2 + b^2} = a - b \quad \text{oder} \quad b - a,$$

je nachdem a grösser oder kleiner als b ist.

Ist a eine reelle, von Null verschiedene, b eine positive Zahl, so ist $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ oder $-a\sqrt{b}$, je nachdem a positiv oder negativ ist.

7) Die in der Formel (6) auf S. 194 vorkommende ganze Zahl g_r liegt stets unter $10\left\{1 + \frac{1}{10^{r-1}}\right\}^{m-1}$, also jedenfalls unter $10 \cdot 2^{m-1}$. — Leicht zu zeigen durch die Bemerkung, dass $a < (A + 10^{k-r+1})^m$ ist, und Anwendung der Beziehung 3) in Nr. 2.

8) Es bedeute p die grösste, in dem Ausdrucke $2 + \log \frac{2(10^n - 1)}{121(m-1)}$ enthaltene, ganze Zahl, ferner sei $q = n - \log\{11(m-1) + 1\}$; dann besteht die Beziehung

$$10^n - \frac{1}{10^s} < \sqrt[m]{10^{mn} - 1} < 10^n,$$

worin $s = 0$ zu setzen ist, falls $q < 0$ ist, dagegen $s = p$, falls $q \geqq 0$ ist.

Diese Ungleichung ergiebt sich aus der Schlussbetrachtung in Nr. 7*, indem man bedenkt, dass hier für $r = n$ nach S. 197 $A = 10^n - 1$ ist.

9) Wie viel Ziffern hat 9^m (m natürliche Zahl)? — Auflösung der Ungleichung $9^m < 10^{m-k}$ ($k = 1, 2 \cdots$).

10) „Die Formel (1) auf S. 193, dass

$$1 + \frac{d}{m} - \sqrt[m]{1 + d} < \frac{m-1}{2m^2} d^2 \tag{1}$$

ist, auch für den Fall dass $m \geqq 4$ ist, zu beweisen.“

Zunächst ergiebt sich mittelst der Formel (i) auf S. 191, dass

$$x = 1 + \frac{d}{m} - \sqrt[m]{1 + d} < 1 + \frac{d}{m} - \frac{1}{1 - \frac{d}{m(1+d)}} = \frac{\frac{m-1}{m^2} d^2}{1 + \frac{m-1}{m} d} \tag{2}$$

ist. Hieraus erhält man die Beziehung (1) unmittelbar, wenn $\frac{m-1}{m} d \geqq 1$ d. i. $d \geqq \frac{m}{m-1}$ ist.

Um den Beweis derselben auch für den Fall, dass $0 < d < \frac{m}{m-1}$ ist, zu erbringen, bemerke man zuerst, dass

$$x < \left\{\left(1 + \frac{d}{m}\right)^m - 1 - d\right\} : m\left(1 + \frac{d}{m}\right)^{m-2}\left\{1 + \frac{d}{m} - \frac{m-1}{2} x\right\} \quad (3)$$

ist, was sich durch Entwickelung der rechten Seite der Formel

$$1 + d = \left[\left(1 + \frac{d}{m}\right) - x\right]^m$$

nach dem binomischen Satze in Nr. 3 leicht ergiebt.

Entwickelt man ferner nach demselben die Potenz $\left(1 + \frac{d}{m}\right)^m$, so findet man

$$\frac{1}{m}\left\{\left(1+\frac{d}{m}\right)^m - 1 - d\right\} = \frac{m-1}{2} \frac{d^2}{m^2}\left\{\left(1+\frac{d}{m}\right)^{m-2} - \frac{2(m-2)}{3}\left(1+\frac{d}{m}\right)^{m-3} \frac{d}{m}\right.$$
$$\left. + \frac{(m-2)(m-3)}{4} \frac{d^2}{m^2}\left[\left(1 + \frac{d}{m}\right)^{m-4} - \sigma\right]\right\},$$

worin $\sigma > 0$ ist. Demnach und nach der Beziehung (2) kann man aus (3) die Ungleichung

$$x < \frac{m-1}{2m^2} d^2 \frac{Z}{N} \quad (4)$$

ableiten, worin

$$Z = \left(1 + \frac{d}{m}\right)^2 - \frac{2m-4}{3}\left(1 + \frac{d}{m}\right)\frac{d}{m} + \frac{(m-2)(m-3)}{4} \frac{d^2}{m^2}$$

$$N = \left(1 + \frac{d}{m}\right)^3 - \frac{(m-1)^2}{1 + \frac{m-1}{m} d}\left(1 + \frac{d}{m}\right)^2 \frac{d^2}{2m^2}$$

ist. Aus (4) erhellt die Richtigkeit der Formel (1) unmittelbar, da der Bruch $Z:N$, wenn $d < m:(m-1)$ ist, echt ist. Um das zu beweisen, bildet man die Differenz

$$D = \left(1 + \frac{m-1}{m} d\right)(N - Z)$$

und zeigt, dass sie positiv ist. Ordnet man nämlich D nach steigenden Potenzen von $d:m$, so findet man leicht, dass

$$D > \frac{d}{m}\left\{\frac{2m-1}{3} - \frac{(2m-1)^2}{12} \frac{d}{m} - \frac{(m-1)^3}{4} \frac{d^2}{m^2} - \frac{(m-1)(m-3)}{2} \frac{d^3}{m^3}\right\}$$

ist, und bemerkt, dass der Werth des Ausdruckes innerhalb der Klammern selbst für $d = m:(m-1)$ positiv ist, wenn $m \geqq 3$ ist.

11) Die Beziehung (α) auf S. 196 besteht schon, wenn

$$C \geqq \frac{121}{20}(m-1) = 6{,}05\,(m-1)$$

ist. — Man forme (α) mittelst der Gleichung (β) a. a. O. in die Formel um $\left(1 + \frac{1}{C}\right)^m \leqq 1 + \frac{11m}{10C}$, ziehe dann daraus die m^{te} Wurzel und wende auf die rechte Seite die in der Uebung 10) bewiesene Formel an.

11*) „Zwischen zwei positive Zahlen a b sind n mittlere geometrische Proportionalen $x_1, x_2 \cdots x_n$ einzuschalten“ d. h. es soll

$$\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \cdots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{b}$$

sein. Lösung:

$$x_1 = \sqrt[n+1]{a^n b}, \quad x_2 = \sqrt[n+1]{a^{n-1} b^2} \quad \cdots \quad x_n = \sqrt[n+1]{a b^n}.$$

12) Die einfachsten eindeutigen Beziehungen (vgl. Nr. 8) einer Veränderlichen y zu einer anderen x sind die gerade und die verkehrte Proportionalität der ersteren zur letzteren. y heisst zu x proportional, wenn die zweien Werthen von x entsprechenden Werthe von y dasselbe Verhältniss (VII. 18) haben wie die ersteren. Demnach ist, wenn zu $x = a$ der Werth $y = b$ gehört,

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \quad \text{d. i.} \quad y = \frac{b}{a} x.$$

y ist also eine ganze lineare Function von x ohne constantes Glied. y heisst verkehrt proportional zu x, wenn das Verhältniss je zweier Werthe von y gleich dem umgekehrten Verhältnisse der zugehörigen Werthe von x ist; dann ist also

$$\frac{y}{b} = \frac{a}{x} \quad \text{d. i.} \quad y = \frac{ab}{x}.$$

Man beweise den folgenden Satz: „Ist die auf positive Werthe beschränkte Veränderliche y eindeutig auf die gleichfalls nur positiver Werthe fähige Veränderliche x in der Art bezogen, dass der Summe je zweier Werthe x, x' der letzteren die Summe der ihnen entsprechenden Werthe y, y' der ersteren zugeordnet ist, so ist y proportional x d. h. es besteht zwischen x und y die lineare Gleichung $y = cx$, worin c eine Constante bedeutet.“ Der Beweis kommt auf die Bestimmung aller eindeutigen positiven Functionen $\varphi(x)$ des positiven x hinaus, die der Functionalgleichung

$$\varphi(x) + \varphi(x') = \varphi(x + x') \tag{a}$$

genügen. Aus derselben ergiebt sich zunächst, dass bei rationalem positivem μ

$$\varphi(\mu) = \mu \varphi(1) \tag{b}$$

ist. Ferner, dass wenn $x' > x$ ist, alsdann $\varphi(x') > \varphi(x)$ ist. Hieraus erkennt man leicht, dass die Gleichung (b) auch bei irrationalem positivem μ gelten muss. — Der in Rede stehende Satz stimmt völlig zu dem Satze von Darboux (vgl. S. 208), wonach auch bei unbeschränktem x und $\varphi(x)$ bloss die Function $\varphi(x) = x\varphi(1)$ die Gleichung (a) befriedigt, woferne nur angenommen wird, dass es ein Intervall von x, etwa von $x = c$ bis $x = c + d$ giebt, für welches die zugehörigen Werthe von $\varphi(x)$ zwischen den festen Zahlen A, B liegen. (Beweis wie beim ähnlichen Satze a. a. O.)

13) Bedeutet n wie auch in den folgenden Aufgaben eine natürliche Zahl und ist $0 < a < 1$, so ist $\lim\limits_{n=+\infty} n a^n = 0$. — Man setze $a = 1 : (1 + d)$ und wende den binomischen Satz in Nr. 3 an.

14) „Ist a eine beliebige reelle Zahl, so hat man

$$\lim_{n=+\infty} (a^n : n!) = 0.“$$

Der Satz folgt unmittelbar aus der Ungleichung

$$\frac{|a|^n}{n!} < \frac{|a|^m}{m!} \left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m} \qquad (n > m),$$

wobei $m+1$ die erste, $|a|$ übersteigende ganze Zahl bedeutet.

15) „Hat $f(n)$ bei $\lim n = +\infty$ einen positiven Grenzwerth a, so ist

$$\lim_{n=+\infty} \{f(n)\}^{\mathfrak{m}} = a^{\mathfrak{m}}.“$$

Der Beweis dieser Formel stützt sich im Falle, dass der Exponent $\mathfrak{m}$ eine ganze Zahl ist, auf den 2. Satz in VII. 3 und 14, im Falle, dass er eine gebrochene Zahl ist, auf die Formel III in Nr. 1[1]) und im Falle dass er eine irrationale Zahl ist, auf die Ungleichungen in Nr. 10. Natürlich gilt der Beweis für den letzten Fall auch für die übrigen.

15*) Bedeutet $F(x)$ eine ganze Function m^{ten} Grades von x (S. 200), ist also $F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, so hat man

$$\lim_{n=+\infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = a_0.$$

16) Je nachdem a positiv oder negativ ist, hat man $\log a^{2n} = 2n \log a$ oder $2n \log(-a)$.

17) Der von Neper eingeführte Logarithmus von b, $y = \log \operatorname{nep} b$, ist die Wurzel der Gleichung

$$10^7 \cdot q^y = b. \tag{a}$$

Welchen Werth hat q wenn, wie Neper in der „Mirifici logarithmorum canonis constructio“ (1619, englisch von Macdonald 1889) Nr. 30 festsetzt,

$$\log \operatorname{nep} (10^7 - 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{10^7}{10^7 - 1}\right) \qquad (= d)$$

sein soll?“

Antwort. Aus $10^7 \cdot q^d = 10^7 - 1$ folgt

$$q = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Hiernach ergiebt sich aus (a), dass

$$y\, l\, q = \frac{y}{d}\, l\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = l\left(\frac{b}{10^7}\right),$$

also

$$y = \log \operatorname{nep} b = d\, l\left(\frac{10^7}{b}\right) \cdot \left[-\frac{1}{l\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)}\right] \tag{b}$$

1) Gemeint ist die Formel

$$\sqrt[m]{y} - \sqrt[m]{b} = (y - b) : \left\{y^{\frac{m-1}{m}} + y^{\frac{m-2}{m}} b^{\frac{1}{m}} + \cdots + y^{\frac{1}{m}} b^{\frac{m-2}{m}} + b^{\frac{m-1}{m}}\right\}.$$

ist. Diesen Ausdruck werden wir in Uebung 17) zum IX. Abschnitt in eine Potenzreihe von 10^{-7} entwickeln.

18) „Es ist neben

$$1 + x > 0 \qquad x > l(1 + x).\text{“}$$

Folgt unmittelbar aus der Beziehung (a) auf S. 218. Hieraus ergiebt sich, dass

19) Neben $a > b > 0$ $\quad \frac{a-b}{b} > la - lb > \frac{a-b}{a}$ ist.

20) Wie lauten die Sätze 18) und 19) für die Logarithmen zur Basis B?

21) Sobald die natürliche Zahl n die Zahl e in Nr. 12 überschritten hat, nimmt der Bruch $ln:n$ mit wachsendem n beständig ab und zwar ist sein Grenzwerth bei $\lim n = +\infty$ Null. — Der erste Theil wird durch Betrachtung der Differenz

$$\frac{ln}{n} - \frac{l(n+1)}{n+1} = \frac{(n+1)\,ln - n\left\{ln + l\left[1 + \frac{1}{n}\right]\right\}}{n(n+1)}$$

mit Hilfe der Formel (9*) auf S. 216 bewiesen; der zweite ergiebt sich, wenn man $n = m^k$, wo m eine feste ganze Zahl bedeutet, setzt und k ins Unendliche wachsen lässt.

22) Ausführung des Beweises der Ungleichungen (17) S. 207 im Falle dass $\mathfrak{m} > 1$ ist.

23) Man zeige direct, dass für die Function $h(a)$ S. 219 die Formel

$$h(a^x) = xh(a)$$

besteht.

IX. Abschnitt.

Die unendlichen Reihen mit reellen Gliedern.

1. Convergente und divergente Reihen. — Es sei eine unbegrenzte Folge von reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2 \cdots a_n \cdots$ gegeben d. h. eine arithmetische Vorschrift, nach welcher man beliebig viele derselben bestimmen und anordnen kann. Bilden wir die Partialsummen

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \quad \cdots$$
$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

wofür man auch schreibt

$$s_n = \sum_0^n {}_p\, a_p,$$

so entsteht die Frage, wie verhält sich s_n beim Grenzübergang $\lim n = +\infty$.

Wenn $\lim s_n$ bei $\lim n = +\infty$ eine endliche Zahl a ist, so heisst die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + a_2 \cdots$ convergent, a der Grenzwerth derselben. a als die „Summe" der unendlich vielen Glieder $a_0, a_1 \cdots$ zu erklären, ist, wie sich in Nr. 8 zeigen wird, nicht immer zulässig. Schreibt man, was manchmal bequem ist,

$$(1) \qquad a = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_0^\infty {}_n\, a_n,$$

so soll das im Allgemeinen nichts Anderes besagen, als dass die Zahlen a_n in der durch das Wachsen des Index n angegebenen Ordnung aneinander zu reihen sind und dass alsdann bei $\lim n = +\infty$ $\lim s_n = a$ sein soll, d. h. dass zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ so gehört, dass für alle $n > \mu$

$$|s_n - a| < \varepsilon.$$

Hat die Partialsumme s_n bei $\lim n = +\infty$ keinen endlichen Grenzwerth, so heisst die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ divergent. Dabei kann s_n bei $\lim n = +\infty$ entweder einen bestimmt unendlichen Grenzwerth (d. i. $+\infty$ oder $-\infty$) oder gar keinen Grenzwerth haben. Es ist

$$\lim_{n=+\infty} s_n = +\infty,$$

wenn zu jeder positiven Zahl G eine andere μ so gehört, dass wenn nur $n > \mu$, $s_n > G$ ist; dagegen ist

$$\lim_{n=+\infty} s_n = -\infty,$$

wenn neben $n > \mu$ stets $s_n < -G$ ist.

Hat s_n bei $\lim n = +\infty$ keinen Grenzwerth, so hat es dabei nach VII. 16 zwei verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen, von denen eine oder selbst beide unendlich sein können. Im letzteren Falle ist die untere Unbestimmtheitsgrenze $-\infty$, die obere $+\infty$. Wenn die Function s_n endlich ist (vgl. S. 170), so sind die beiden Unbestimmtheitsgrenzen bei $\lim n = +\infty$ ebenfalls endliche Zahlen. Bezeichnet man mit O die obere, mit U die untere, so sagt man, die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ schwanke bei $\lim n = +\infty$ zwischen den Grenzen U und O und nennt $O - U$ den Betrag der Schwankung.

Lässt sich die endliche Reihe $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ summiren d. h. dafür ein geschlossener, aus einer von n unabhängigen Anzahl von Gliedern bestehender Ausdruck aufstellen, so wird man denselben zur Entscheidung der Frage benutzen, ob s_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth hat oder nicht. Dieses Verfahren möge an den nachstehenden drei Beispielen, welche wohl die wichtigsten unendlichen Reihen liefern, erläutert werden.

Beispiele convergenter und divergenter Reihen.

1) Die unendliche geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + \cdots$$

convergirt dann und nur dann, wenn x dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist, und zwar ist ihr Grenzwerth $\frac{1}{1-x}$.

Man hat nach VIII. 1, Gl. (III), wenn x von $+1$ verschieden ist,

$$s_n = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x};$$

somit ist

$$\frac{1}{1-x} - s_n = \frac{x^{n+1}}{1-x}. \tag{2}$$

Setzen wir $|x| = X$ und nehmen zunächst an, es sei $X < 1$, also

$$X = 1 : (1 + d),$$

wo $d > 0$. Dann ist nach VIII. 2 Ungleichung 4)

$$\left|\frac{1}{1-x} - s_n\right| \leqq \frac{X^{n+1}}{1-X} = \frac{1}{d(1+d)^n} < \frac{1}{d(1+nd)};$$

somit

$$\left|\frac{1}{1-x} - s_n\right| < \varepsilon,$$

wenn nur

$$\frac{1}{d(1+nd)} < \varepsilon \quad \text{d. i.} \quad n > \frac{1-d\varepsilon}{d^2\varepsilon}$$

ist. Wir finden also

$$\lim_{n=+\infty} s_n = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < +1).$$ [1]

Ist $X \geqq 1$, so divergirt die unendliche geometrische Reihe d. i. ihre Partialsumme s_n (in (2)) hat bei $\lim n = +\infty$ keinen endlichen Grenzwerth. Und zwar hat sie bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth $+\infty$, falls $x \geqq 1$ ist; sie schwankt zwischen den Werthen 0 und 1, falls $x = -1$, und hat bei $\lim n = +\infty$ die Unbestimmtheitsgrenzen $-\infty$ und $+\infty$, falls $x < -1$ ist.

Ist $x = 1$, so geht die soeben erwähnte Summe in $n+1$ über, hat also bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth $+\infty$. Ist $x > 1$, so ist jedes Glied von s_n mit Ausnahme des ersten grösser als 1; wir finden daher $s_n > n+1$, also hat s_n bei $\lim n = +\infty$ ebenfalls den Grenzwerth $+\infty$. Ist $x = -1$, so ist $s_{2k} = 1$, $s_{2k+1} = 0$ $(k = 0, 1, 2 \cdots)$. Ist endlich $x = -X$ und $X > 1$, so liefert die Formel (2)

$$s_n = \frac{1 + (-1)^n X^{n+1}}{1+X},$$

woraus ersichtlich ist, dass

$$\lim_{k=+\infty} s_{2k} = +\infty \qquad \lim_{k=+\infty} s_{2k+1} = -\infty.$$

2) Es sei

$$a_0 = b_0 - b_1, \quad a_1 = b_1 - b_2, \quad \cdots \quad a_n = b_n - b_{n+1},$$

so ist

$$s_n = b_0 - b_{n+1}.$$

Die Reihe

$$(3) \qquad (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots$$

convergirt dann und nur dann, wenn b_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth b hat. Und zwar ist

$$\lim_{n=+\infty} s_n = b_0 - b.$$

Falls $b = 0$ ist, so ist der Grenzwerth der in Rede stehenden Reihe die Zahl b_0 selbst. — Vermittelst der soeben abgeleiteten Formel kann man die Grenzwerthe mancher Reihen finden. Setzt man z. B.

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \tfrac{1}{2}, \quad b_2 = \tfrac{1}{3} \quad \cdots \quad b_n = \frac{1}{n+1},$$

---

1) Der Wichtigkeit der geometrischen Reihe wegen haben wir hier nach dem Vorgange von B. Bolzano (Der binomische Lehrsatz 1816 § 12) den Beweis des auf S. 186 erwähnten Satzes, dass, wenn $0 < x < 1$ ist, x^{n+1} bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0 hat, vollständig wiederholt. — Ueber ein älteres Verfahren, den Grenzwerth der geometrischen Reihe zu ermitteln, vgl. S. 234.

so ergiebt sich

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots.$$

Die Reihe (3) divergirt zufolge der obigen Formel für s_n, wenn b_n bei $\lim n = +\infty$ entweder einen unendlichen oder gar keinen Grenzwerth besitzt.

3) Für die Reihe

$$a_{2k} = b_k, \quad a_{2k+1} = -b_{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2 \cdots)$$

d. i.

$$b_0 - b_1 + b_1 - b_2 + b_2 - \cdots \tag{4}$$

ist

$$s_0 = b_0 \qquad s_1 = b_0 - b_1$$

und überhaupt

$$s_{2k} = b_0 \qquad s_{2k+1} = b_0 - b_{k+1}.$$

Hat b_k bei $\lim = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth $b \gtrless 0$, so schwankt die Reihe (4) bei $\lim n = +\infty$ zwischen $b_0 - b$ und b_0; hat b_k bei $k = +\infty$ den Grenzwerth $\pm\infty$, so schwankt sie zwischen $\mp\infty$ und b_0. — Nur wenn

$$\lim_{k=+\infty} b_k = 0$$

ist, so convergirt die Reihe (4) und zwar zum Grenzwerthe b_0.

2. Die zur Convergenz einer unendlichen Reihe nothwendige und hinreichende Bedingung.[1])

Lässt sich die Partialsumme s_n der unendlichen Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$ nicht in geschlossener Form darstellen, so kann man das in Nr. 1 benutzte Verfahren nicht anwenden, um über die Convergenz oder Divergenz derselben zu entscheiden. Man muss dann auf den allgemeinen Satz in VII. 13 über die Existenz eines endlichen Grenzwerthes zurückgreifen.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ convergent sei, besteht darin, dass zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl μ in der Art gehört, dass wenn $n > \mu$,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+r}| < \varepsilon \tag{5}$$

ist, was für eine natürliche Zahl r auch sein mag. Demnach darf r sowohl jede bestimmte, als von n abhängige natürliche Zahl sein.

Denn dazu, dass s_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenz-

---

1) B. Bolzano (Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes u. s. w. 1817 § 7); Cauchy (Oeuvres II. sér. IV p. 116, VII p. 267); Abel (Oeuvres I p. 221, II p. 197). Näheres bei Pringsheim (Encyklopädie d. math. W. I. S. 78 und Ber. der Münchner Acad. 1897. S. 327).

werth hat, ist nothwendig und hinreichend, dass zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine andere $\mu > 0$ so gehört, dass für jedes $n > \mu$

$$|s_{n+r} - s_n| < \varepsilon$$

ist, wobei r alle Werthe $1, 2 \cdots$ annehmen kann. Es ist aber

$$s_{n+r} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+r}.$$

Aus (5) folgt für $r = 1$

$$(5^*) \qquad |a_{n+1}| < \varepsilon,$$

wenn nur $n > \mu$. D. i.

$$\lim_{n=+\infty} a_n = 0.$$

Zur Convergenz von $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ ist nothwendig, jedoch nicht hinreichend, dass das allgemeine Glied der Reihe a_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth Null hat. Das Zutreffen der Bedingung $\lim a_n = 0$ bei $\lim n = +\infty$ ist indess zur Convergenz der Reihe (1) nicht hinreichend, wie einfache Beispiele zeigen. Wir werden in Nr. 4 sehen, dass die harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

divergirt.

3. Allgemeine Sätze über die unendlichen Reihen. — Der Kürze wegen mögen als gleichartig bezeichnet werden Reihen, die convergent sind, solche die denselben unendlichen und solche die gar keinen Grenzwerth haben.

1) „Ist

$$a_n = b_n \qquad (n = 0, 1, 2 \cdots),$$

so sind gleichartig die Reihen

$$(6) \qquad a_0 + a_1 + a_2 \cdots, \quad b_0 + b_1 + b_2 + \cdots.\text{“}$$

Denn setzt man

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n = t_n,$$

so ist

$$s_n = t_n.$$

„Convergirt insbesondere die erste der Reihen, so auch die zweite und beide haben denselben Grenzwerth.“

2) „Ist in den convergenten Reihen (6) $a_n \geqq b_n$, jedoch nicht durchaus $a_n = b_n$, so ist $a > b$, unter b $\lim t_n$ bei $n = +\infty$ verstanden.“ — Wenn nämlich $a_m > b_m$, so hat man für $n \geqq m$

$$s_n \geqq t_n + (a_m - b_m),$$

also

$$a \geqq b + (a_m - b_m),$$

d. i.

$$a > b.$$

3) „Die Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$ und jede Reihe, die aus ihr durch Weglassung einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Summe s sei, hervorgeht, sind gleichartig. — Convergirt die erstere, so auch die letztere, und umgekehrt. Bedeuten a, a' ihre Grenzwerthe, so ist $a = a' + s$. Lässt man insbesondere die $(m + 1)$ Anfangsglieder $a_0, a_1 \cdots a_m$ weg, so erhält man die Reihe

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots,$$

deren Grenzwerth r_m ein Rest der Reihe heisst. Dabei hat man

$$a = s_m + r_m.$$

Auch ist $\lim r_m = 0$ bei $\lim m = + \infty$."

Setzt man nämlich

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+p} = r_{m,p},$$

so ist

$$s_{m+p} = s_m + r_{m,p},$$

und wenn bei $\lim p = + \infty$

$$\lim s_{m+p} = a,$$

so hat man

$$r_m = \lim r_{m,p} = a - s_m.$$

Und umgekehrt, wenn bei $\lim p = + \infty$ $r_{m,p}$ den endlichen Grenzwerth r_m hat, so ist

$$\lim_{p=+\infty} s_{m+p} = s_m + r_m.$$

Dass zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ gehört, derart, dass für $m > \mu$

$$|r_m| < \varepsilon$$

ist, wird so gezeigt. Ist $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, so hat man nach (5), wenn nur m grösser als eine gewisse Zahl μ' ist,

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+p}| < \varepsilon'.$$

Hieraus ergiebt sich durch den Grenzübergang $\lim p = + \infty$ nach dem 2. Satze auf S. 152, dass $|r_m| \leqq \varepsilon'$, also $< \varepsilon$ ist.

Zufolge dieses Satzes kann eine Reihe, welche nur Glieder mit einem Zeichen in unbegrenzter Anzahl enthält, auf eine solche zurückgeführt werden, welche nur Glieder mit diesem Zeichen enthält.

4) Eine convergente Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ ist unbedingt associativ[1]) d. h. leitet man aus ihr eine neue dadurch ab, dass man ihre Glieder in der angegebenen Ordnung gruppenweise vereinigt und die so erhaltenen Summen in der Reihenfolge belässt, in

1) Der Satz ist ein besonderer Fall eines Satzes über eine beliebige unendliche Reihe (vgl. Hočevar, Monatshefte f. Math. V. S. 30), welcher selbst wieder in einem Satze von Peano enthalten ist (vgl. a. a. O. VI. S. 204).

welcher sie entstanden sind, so ist auch die neue Reihe convergent und hat denselben Grenzwerth wie die gegebene. Man setze also

$$(7) \qquad \begin{cases} a_0 + a_1 \qquad + \cdots + a_{m_1} = A_1 \\ a_{m_1+1} + a_{m_1+2} \quad + \cdots + a_{m_2} = A_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m_{n-1}+1} + a_{m_{n-1}+2} + \cdots + a_{m_n} = A_n \end{cases}$$

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = S_n,$$

so ist

$$\lim S_n = \lim s_n$$

bei $\lim n = +\infty$, da

$$S_1 = s_{m_1}, \quad S_2 = s_{m_2}, \quad \cdots \quad S_n = s_{m_n}.$$

Sind umgekehrt die Glieder der convergenten Reihe $A_1 + A_2 + \cdots$ algebraische Summen wie in (7) und man lässt die Klammern weg, so dass man die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ erhält, so braucht die letztere nicht zu convergiren.[1] So ist die Reihe $(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots$ in Nr. 1 convergent, wenn bei $\lim n = +\infty$ $\lim b_n$ endlich ist; die Reihe (4):

$$b_0 - b_1 + b_1 - b_2 + b_2 - \cdots$$

aber nur dann, wenn $\lim b_n = 0$. — Ist aber die neue Reihe $a_0 + a_1 + a_2 \cdots$ convergent, so hat sie nach obigem Satze denselben Grenzwerth wie $A_1 + A_2 + \cdots$.

Das Weglassen der Klammern in $A_1 + A_2 + \cdots$ ist stets gestattet, falls bei $\lim n = +\infty$ $\lim a_n = 0$ und die Anzahl der in $A_n (n = 1, 2 \cdots)$ stehenden Glieder eine von n unabhängige Zahl q nicht überschreitet. — Denn unter dieser Voraussetzung convergirt die Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$. Ist nämlich $\lim S_n = A$, so existirt eine Zahl $\mu > 0$, so dass $|S_n - A| < \varepsilon$ und $|a_n| < \varepsilon$ für $n > \mu$. Demnach folgt aus der Gleichung $s_p - A = (s_p - S_n) + (S_n - A)$, dass

$$|s_p - A| < q\varepsilon$$

ist, wenn nur $p > m_n$, unter n irgend eine ganze Zahl $> \mu$ verstanden.

5) „Ist k eine von Null verschiedene Constante, so sind die Reihen

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots, \qquad ka_0 + ka_1 + ka_2 + \cdots$$

gleichartig. — Convergirt die erstere und zwar zum Grenzwerthe a, so convergirt die letztere zum Grenzwerthe ka."

6) „Convergiren zwei Reihen wie (6), so convergirt auch die Reihe

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots$$

und zwar ist ihr Grenzwerth $a \pm b$, wobei gesetzt ist

$$\lim_{n=+\infty} s_n = a, \qquad \lim_{n=+\infty} t_n = b."$$

---

1) M. Stern, Algebr. Analysis 1860 S. 63.

Denn es ist

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + \cdots + (a_n \pm b_n) = s_n \pm t_n.$$

Daraus folgt, dass wenn eine der beiden Reihen (6) divergirt, die andere convergirt, die Reihe

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + \cdots$$

divergiren muss.

Und weiter ergiebt sich aus dem Satze unmittelbar, dass er auf jede endliche Anzahl von convergenten unendlichen Reihen ausgedehnt werden kann.

In älterer Zeit wurde der Grenzwerth der geometrischen Reihe häufig in folgender Art ermittelt. Man sagte: „Es sei

$$1 + x + x^2 + \cdots = s.$$

Dann ist

$$x + x^2 + \cdots = xs,$$

also ist

$$1 = (1 - x)s \quad \text{und} \quad s = 1 : (1 - x).\text{“}$$

Zufolge der vorstehenden Sätze 5) und 6) ist dieser Schluss richtig, wenn x so gewählt ist, dass die unendliche geometrische Reihe convergirt. Er kann also erst angewendet werden, nachdem die Untersuchung auf S. 228 oder eine ähnliche nach Nr. 2 gemacht ist. Unlogisch wäre es aber, denselben auf solche Werthe von x, wofür die genannte Reihe divergirt, auszudehnen, weil dann der Ausdruck $1 + x + x^2 + \cdots$ keine Zahl ist. Die Formel von Guido Grandi (vgl. M. Cantor, Gesch. d. Math. III. S. 351), welche man aus der vorstehenden für $x = -1$ erhält, d. i.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1/2,$$

hat demnach keinen Sinn.

4. Reihen mit positiven Gliedern. — Wir wenden uns nun zu solchen unendlichen Reihen, die nur gleichbezeichnete Glieder enthalten, wobei es zufolge des 5. Satzes der vorigen Nr. genügt, anzunehmen, dass alle Glieder positiv sind.

Satz. Wenn die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ nur positive Glieder enthält, so hat sie entweder einen positiven endlichen Grenzwerth a oder den Grenzwerth $+\infty$. Im ersteren Falle hat man noch $a > s_n$.

Denn jetzt ist, falls $r \geqq 1$, $s_{n+r} > s_n$, so dass hier unmittelbar der letzte Satz in VII. 14 angewendet werden kann. Die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ convergirt also immer, wenn eine positive Zahl B existirt, so dass für jeden Werth von n $s_n < B$. Und umgekehrt: Convergirt die genannte Reihe, so muss eine Zahl $B > 0$ existiren, so dass die Summe von beliebigen unter den Gliedern $a_0, a_1, \cdots$ unter B liegt — ein Satz, der nicht für jede convergente Reihe gilt.

Beispiel. Die harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{8}$$

ist divergent, hat also den Grenzwerth $+\infty$.

Man beweist diesen Satz durch die Bemerkung, dass ($k \geqq 2$)

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k} > \frac{2^k - 2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}.$$

Demnach ist, wenn $n \geqq 2^k$,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{k-1}{2} = 1 + \frac{k}{2},$$

es kann somit s_n hier grösser werden, als jede positive Zahl.

Es giebt kein allgemeines Verfahren, nach welchem entschieden werden könnte, ob eine beliebig vorgelegte Reihe aus positiven Gliedern convergent oder divergent ist. Man sucht die Lösung der Frage häufig durch Vergleichung der vorgelegten Reihe mit anderen, deren Verhalten bereits bekannt ist, herbeizuführen. Hierzu dienen die folgenden einfachen Sätze, die vermöge des besonderen, in dem Eingangs erwähnten Satze ausgesprochenen Charakters der Reihen mit positiven Gliedern immer paarweise auftreten.

Es seien

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots, \quad b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$$

Reihen mit positiven Gliedern. Ihre Grenzwerthe, wenn sie convergiren, werden mit a, b bezeichnet.

1) „Ist $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ convergent und von einem bestimmten Werthe von n (m) an $b_{n+l} \leqq a_{n+k}$, wo k l wie stets im Folgenden constante ganze Zahlen mit Einschluss der 0 bedeuten, so convergirt auch die Reihe

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots."$$

„Ist aber die erstere Reihe divergent und für

$$n \geqq m \quad b_{n+l} \geqq a_{n+k},$$

so divergirt auch die letztere Reihe."

Im ersten Falle hat man nämlich

$$b_{m+l} + b_{m+l+1} + \cdots + b_{n+l} \leqq a_{m+k} + a_{m+k+1} + \cdots + a_{n+k}$$

oder

$$t_{n+l} - t_{m+l-1} \leqq s_{n+k} - s_{m+k-1},$$

also

$$t_{n+l} < a + t_{m+l-1} - s_{m+k-1};$$

somit convergirt $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$. Im zweiten Falle ist

$$t_{n+l} \geqq s_{n+k} + t_{m+l-1} - s_{m+k-1};$$

also wegen $\lim s_n = +\infty$ bei $\lim n = +\infty$ auch $\lim t_n = +\infty$.

2) „Ist $a_0 + a_1 + \cdots$ convergent und für alle $n \geqq m$

$$\frac{b_{n+l+1}}{b_{n+l}} \leqq \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}},$$

so convergirt auch die Reihe $b_0 + b_1 + \cdots$."

„Ist die erstere Reihe divergent und für alle $n \geqq m$

$$\frac{b_{n+l+1}}{b_{n+l}} \geqq \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}},$$

so divergirt auch die Reihe $b_0 + b_1 + \cdots$."

Um den ersten Satz zu zeigen, bemerke man, dass wenn $n > m$,

$$\frac{b_{m+l+1}}{b_{m+l}} \leqq \frac{a_{m+k+1}}{a_{m+k}}, \quad \frac{b_{m+l+2}}{b_{m+l+1}} \leqq \frac{a_{m+k+2}}{a_{m+k+1}} \quad \cdots \quad \frac{b_{n+l}}{b_{n+l-1}} \leqq \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}},$$

somit

$$\frac{b_{n+l}}{b_{m+l}} \leqq \frac{a_{n+k}}{a_{m+k}} \quad \text{d. i.} \quad b_{n+l} \leqq \frac{b_{m+l}}{a_{m+k}} a_{n+k}. \tag{9}$$

Nun convergirt die Reihe $a_{m+k+1} + a_{m+k+2} + \cdots$; folglich nach dem 5. Satze in Nr. 3 auch

$$\frac{b_{m+l}}{a_{m+k}} a_{m+k+1} + \frac{b_{m+l}}{a_{m+k}} a_{m+k+2} + \cdots;$$

und zufolge des vorstehenden Satzes 1) die Reihe

$$b_{m+l+1} + b_{m+l+2} + \cdots;$$

somit convergirt auch $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$.

Der zweite Satz folgt auf ähnliche Weise durch die Bemerkung

$$b_{n+l} \geqq \frac{b_{m+l}}{a_{m+k}} a_{n+k}. \tag{10}$$

Anwendung.[1] „Es sei $a_0, a_1, a_2 \cdots a_n \cdots$ eine Folge positiver Zahlen, wofür $\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k})$[2] bei $\lim n = +\infty$ existirt. Ist dieser Grenzwerth kleiner als 1 (Null eingeschlossen), so nehmen die a_n von einem bestimmten Werthe von n an mit wachsendem Index beständig ab und es ist $\lim\limits_{n=+\infty} a_n = 0$. Die Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$ ist convergent."

„Wenn aber der genannte Grenzwerth grösser als 1 ist ($+\infty$ eingeschlossen), so nehmen die a_n von einem bestimmten Werthe von n an mit dem Index beständig zu und es ist $\lim\limits_{n=+\infty} a_n = +\infty$. Die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 \cdots$ ist divergent."

Es sei zunächst

$$\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k})$$

---

1) Cauchy, Cours d'Analyse S. 134.

2) Wenn $\lim (a_{n+1} : a_n)$ vorhanden ist, so ist $\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k})$ ihm gleich. Wir hätten uns also auf den erstern beschränken können; da es jedoch in der Praxis oft bequemer ist, den Quotienten $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ bei von Null verschiedenem k zu bilden, so haben wir ihn stehen lassen.

eine endliche Zahl λ. Dann gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein Index m, so dass für $n > m$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} < \lambda + \varepsilon.$$

Ist $\lambda < 1$, so nehme man $\varepsilon < 1 - \lambda$ an, so dass $\lambda + \varepsilon < 1$ ist. Durch Multiplication der Ungleichungen

$$\frac{a_{m+k+1}}{a_{m+k}} < \lambda + \varepsilon, \ \frac{a_{m+k+2}}{a_{m+k+1}} < \lambda + \varepsilon \ \cdots \ \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} < \lambda + \varepsilon$$

findet man, dass für $n > m$

$$a_{n+k} < a_{m+k}(\lambda + \varepsilon)^{n-m},$$

also bei $\lim n = +\infty$ $\lim a_n = 0$ ist. Die Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$ convergirt nach Satz 2), da die geometrische Reihe

$$1 + (\lambda + \varepsilon) + (\lambda + \varepsilon)^2 + \cdots$$

convergirt. — Ist $\lambda > 1$, so nehme man $\varepsilon < \lambda - 1$, so dass $\lambda - \varepsilon > 1$. Dann findet man durch Multiplication der Ungleichungen

$$\frac{a_{m+k+1}}{a_{m+k}} > \lambda - \varepsilon, \ \frac{a_{m+k+2}}{a_{m+k+1}} > \lambda - \varepsilon \ \cdots \ \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} > \lambda - \varepsilon,$$

dass für $n > m$

$$a_{n+k} > a_{m+k}(\lambda - \varepsilon)^{n-m},$$

also

$$\lim_{n=+\infty} a_n = +\infty,$$

ist, woraus die Divergenz der Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$ unmittelbar hervorgeht. — Falls

$$\lim_{n=+\infty} (a_{n+k+1} : a_{n+k}) = +\infty$$

ist, so denke man sich $\lambda - \varepsilon$ durch irgend welche positive Zahl γ, grösser als 1, ersetzt, wodurch das Ergebniss nicht geändert wird. (Als Beispiele vgl. die Potenzreihen in Nr. 14, 15, 18.)

3) Ist die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ convergent und sind $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_n$ positive Zahlen, die sämmtlich unter einer positiven Zahl C liegen, so convergirt auch die Reihe

$$a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \cdots.\text{“}$$

„Ist die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ divergent und sind $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_n$ positive Zahlen, die sämmtlich über einer positiven Zahl C' liegen, so divergirt auch die Reihe

$$a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \cdots.\text{“}$$

Der erste Theil folgt daraus, dass wenn $0 < \gamma_n < C$,

$$a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + \cdots + a_n\gamma_n < Cs_n < Ca;$$

der zweite daraus, dass wenn $\gamma_n > C'$,

$$a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + \cdots + a_n\gamma_n > C's_n.$$

5. Sätze über die Reihen mit positiven Gliedern.

1) „Hebt man aus den Gliedern der convergenten unendlichen Reihe

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{1}$$

eine unendliche Folge von Gliedern

$$a_{k_0},\ a_{k_1} \cdots a_{k_n} \cdots \tag{1*}$$

heraus, so bilden dieselben eine convergente Reihe. Ihr Grenzwerth a' ist kleiner als a.“

Man hat $a_{k_0} + a_{k_1} + \cdots + a_{k_n} < a$; also convergirt die herausgehobene Reihe. Bezeichnet nun a_l irgend ein Glied der Reihe (1), das in der Folge (1*) nicht vorkommt, so besteht auch die Beziehung

$$a_{k_0} + \cdots + a_{k_n} + a_l < a.$$

Hieraus ergiebt sich durch den Grenzübergang $\lim n = +\infty$

$$a' + a_l \leqq a, \quad \text{folglich ist} \quad a' < a.$$

2) „Sind die Glieder einer convergenten Reihe

$$A = A_0 + A_1 + \cdots A_n + \cdots$$

selbst Summen aus positiven Zahlen:

$$A_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} + \cdots + a_{k_n}^{(n)} \quad (n = 0, 1 \cdots),$$

so convergirt auch die Reihe, die bei Weglassung der Klammern erscheint:

$$a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \cdots + a_{k_0}^{(0)} + a_0^{(1)} + \cdots + a_{k_1}^{(1)} + \cdots,$$

und hat daher nach dem 4. Satze in Nr. 3 ebenfalls den Grenzwerth A.“

Denn wie viele Glieder auch aus dieser Reihe addirt werden, so ist ihre Summe kleiner als A.

3) Jede convergente Reihe aus positiven Gliedern ist commutativ, d. h.: Bringt man ihre Glieder in irgend eine andere Anordnung, so convergirt die neue Reihe und hat denselben Grenzwerth wie die ursprüngliche.[1])

Es seien

$$a_0' + a_1' + a_2' + \cdots \tag{2}$$

die Glieder von (1) in irgend einer anderen Anordnung d. h. es soll in dieser Reihe jedes Glied von (1) stehen und umgekehrt jedes Glied von (2) in der Reihe (1). Setzt man

$$a_0' + a_1' + a_2' + \cdots + a_n' = s_n',$$

so folgt unmittelbar dass $s_n' < a$; also convergirt die Reihe (2) und zwar sei a' ihr Grenzwerth. Und man weiss, zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gehört eine Zahl $\mu > 0$, derart dass für $n > \mu$

$$0 < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+r} < \varepsilon$$

und

$$0 < a'_{n+1} + a'_{n+2} + \cdots + a'_{n+r} < \varepsilon. \tag{3}$$

1) Beweis nach W. Scheibner, Ueber unendliche Reihen 1860 S. 11.

Betrachtet man nun zwei Partialsummen s_n, s'_n, so werden sie einige Glieder gemein haben, deren Summe σ_n sei. Man findet also

$$s_n = \sigma_n + \varrho'_n \quad s'_n = \sigma_n + \varrho_n,$$

wobei die in ϱ'_n vereinigten Glieder im Reste $a'_{n+1} + \cdots$, die in ϱ_n im Reste $a_{n+1} + \cdots$ vorkommen müssen. Somit ergiebt sich aus den Beziehungen (3), dass für alle $n > \mu$

$$0 < \varrho_n < \varepsilon \quad 0 < \varrho'_n < \varepsilon$$

ist. Bildet man endlich die Differenz

$$s'_n - s_n = \varrho_n - \varrho'_n$$

und bemerkt, dass ihr absoluter Betrag kleiner als die grössere der Zahlen ϱ_n, ϱ'_n ist, so erkennt man, dass wenn $n > \mu$ ist, $|s'_n - s_n| < \varepsilon$ ist. Somit ist $\lim_{n=+\infty}(s'_n - s_n) = 0$ d. i. $a' = a$.

Einfacher ist es zu zeigen, dass wenn (1) divergirt, auch (2) divergiren muss.

4) „Vertheilt man die Glieder von (1) in eine endliche Anzahl von unendlichen Reihen

$$\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + \cdots \\ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + a_2^{(m)} + \cdots \end{array}$$

so ist jede derselben convergent und die Summe ihrer Grenzwerthe gleich dem Grenzwerthe a von (1).“ [Befinden sich unter den $(m+1)$ Partialreihen, in welche die Glieder von (1) vertheilt sind, auch endliche, so ist die Summe zu bilden aus den Summen der endlichen und den Grenzwerthen der unendlichen Partialreihen.]

Der Satz folgt aus dem 6. Satze in Nr. 3 und den soeben bewiesenen Sätzen unmittelbar. — Eine andere Frage ist, ob der Satz 4) auch noch gilt, wenn man die Glieder von (1) in eine unendliche Anzahl von Reihen vertheilt, was z. B. dadurch geschehen kann, dass man in die erste Reihe a_0, a_1 und die Glieder mit geradem Index setzt, in die zweite die Glieder des Restes, deren Index durch 3 theilbar ist, in die dritte die Glieder des nunmehrigen Restes, deren Index durch 5 theilbar ist u. s. f. Mittelst des folgenden Hilfssatzes lässt sich jedoch nachweisen, dass der 4. Satz auch jetzt noch besteht.

6. Hilfssatz (vgl. Nr. 11). „Convergirt jede der in unbegrenzter Anzahl vorgelegten unendlichen Reihen

$$\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + \cdots + a_n^{(0)} + \cdots \\ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \cdots + a_n^{(1)} + \cdots \\ a_0^{(2)} + a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \cdots + a_n^{(2)} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + a_2^{(m)} + \cdots + a_n^{(m)} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \tag{4}$$

deren Glieder entweder positiv oder Null sind, und zwar bezüglich zu den Grenzwerthen $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)} \cdots a^{(m)} \cdots$; [1]) convergirt ferner die unendliche Reihe

$$a^{(0)} + a^{(1)} + a^{(2)} + \cdots + a^{(m)} + \cdots \tag{5}$$

und zwar zum Grenzwerthe a, so convergirt auch die Reihe

$$a_0^{(0)} + a_0^{(1)} + a_1^{(0)} + \cdots + a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}^{(1)} + a_n^{(0)} + \cdots, \tag{6}$$

worin die Glieder $a_n^{(m)}$ so angeordnet sind, dass die Summe $m+n$ beim Fortschreiten von links nach rechts nicht abnimmt, und zwar ebenfalls zum Grenzwerthe a. — Und umgekehrt: Convergirt die unendliche Reihe (6) und zwar zum Grenzwerthe a, so convergirt jede Reihe des Schemas (4), und die aus ihren Grenzwerthen gebildete Reihe (5) convergirt ebenfalls und zwar zum Grenzwerthe a."

Beweis. 1. Theil. Greift man aus der Reihe (6) eine endliche Anzahl von Gliedern heraus, so wird der obere Stellenzeiger einen höchsten Werth besitzen, den wir mit m bezeichnen. Dann kann die Summe jener Glieder den Werth

$$a^{(0)} + a^{(1)} + \cdots + a^{(m)}$$

nicht überschreiten, sie ist mithin kleiner als a. Somit convergirt die Reihe (6). — Setzt man nun

$$a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \cdots + a_r^{(n-r)} + \cdots + a_n^{(0)} = d_n,$$

so convergirt nach dem 4. Satze in Nr. 3 auch die unendliche Reihe

$$d_0 + d_1 + \cdots + d_n + \cdots \tag{6*}$$

und zwar hat sie den nämlichen Grenzwerth a', wie die Reihe (6). Daher ist auch

$$\lim_{n=+\infty} \sum_1^{\infty} {}_p\, d_{n+p} = 0. \tag{6**}$$

Es sei ferner

$$d_0 + d_1 + \cdots + d_n = v_n$$
$$a^{(0)} + a^{(1)} + \cdots + a^{(n)} = s^{(n)};$$

so ist leicht ersichtlich, dass

$$s^{(n)} = v_n + r_n, \tag{7}$$

worin r_n die unendliche Reihe mit den Gliedern

$$a_p^{(n)} + a_{p+1}^{(n-1)} + \cdots + a_{p+r}^{(n-r)} + \cdots + a_{p+n}^{(0)} \qquad (p = 1, 2 \cdots)$$

bedeutet. Da dieselben bezw. nicht grösser sind als die Summen d_{n+p} $(p = 1, 2 \cdots)$, so folgt, dass

---

1) Enthält eine von den Zahlen des Schemas (4) nur eine endliche Anzahl von positiven Zahlen, so versteht man unter dem bezüglichen $a^{(m)}$ natürlich die Summe derselben.

$$r_n < d_{n+1} + d_{n+2} + \cdots, \tag{8}$$

mithin vermöge der Formel (6**) $\lim r_n = 0$ für $\lim n = +\infty$ ist. Somit ist

$$\lim (s^{(n)} - v_n) = 0$$

d. i.

$$a' = \lim_{n=+\infty} v_n = \lim_{n=+\infty} s^{(n)} = a.$$

2. Theil. Aus der Convergenz der Reihe (6) folgt unmittelbar die der Reihe (6*) (Satz 4) in Nr. 3) und nach dem 1. in Nr. 5 die der Reihen

$$a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + a_2^{(m)} + \cdots \qquad (m = 0, 1, 2 \cdots). \tag{8*}$$

Dabei ist der Grenzwerth der Reihe (6*) ebenfalls a.

Bezeichnet man die Grenzwerthe der Reihen (8*), wie oben, mit $a^{(m)}$ $(m = 0, 1 \cdots)$, so ist in (7) vermöge der Relation (8)

$$\lim r_n = 0 \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty,$$

also

$$\lim_{n=+\infty} s^{(n)} = \lim_{n=+\infty} v_n = a.$$

Zusatz. Mit Hilfe beider Theile des vorstehenden Satzes folgt der Doppelreihensatz von Cauchy (vgl. S. 252 Note 3)):

„Unter den über Schema (4) bestehenden Voraussetzungen convergirt jede der Verticalreihen desselben

$$a_n^{(0)} + a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \cdots \qquad (n = 0, 1, 2 \cdots);$$

die aus ihren Grenzwerthen $a_0, a_1, a_2 \cdots$ gebildete Reihe convergirt ebenfalls, und zwar ist ihr Grenzwerth die Zahl a.“

Wir brauchen nur das Schema (4) um die Hauptdiagonale umzulegen, d. i. in folgendes

$$\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_0^{(1)} + a_0^{(2)} + \cdots \\ a_1^{(0)} + a_1^{(1)} + a_1^{(2)} + \cdots \\ a_2^{(0)} + a_2^{(1)} + a_2^{(2)} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

zu verwandeln, wobei die Reihe (6) ungeändert bleibt. Vermöge des ersten Theiles des Hilfssatzes convergirt sie und daher kann sein zweiter Theil auf das soeben erwähnte Schema angewendet werden.

7. Weitere Sätze über die Reihen mit positiven Gliedern.

1) „Es sei die Reihe mit positiven Gliedern

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

convergent und a ihr Grenzwerth. Vertheilt man ihre Glieder, ohne eines zu übergehen, in unendlich viele Reihen (4), so convergirt jede unendliche unter ihnen und die aus den Summen der endlichen und

den Grenzwerthen der unendlichen Reihen des Schemas (4) gebildete Reihe convergirt ebenfalls und zwar zum Grenzwerthe a."[1])

Denn nach dem 3. Satze in Nr. 5 convergirt die Reihe (6) und zwar zum Grenzwerthe a. Das Uebrige nach dem 2. Theile in Nr. 6.

2) „Convergiren die unendlichen Reihen

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_m + \cdots, \quad b_0 + b_1 + \cdots + b_n + \cdots$$

und zwar bez. zu Grenzwerthen a, b, so convergirt auch die unendliche Reihe aus den Gliedern $a_m b_n$ ($m = 0, 1, 2 \cdots$, $n = 0, 1, 2 \cdots$) d. i.

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + \cdots + a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_r b_{n-r} + \cdots + a_n b_0 + \cdots \quad (9)$$

und zwar zum Grenzwerthe ab."[2])

Setzt man in der That in (4)

$$a_n^{(m)} = a_m b_n,$$

so convergiren nach dem 5. Satze in Nr. 3 die horizontalen Reihen bezüglich zu den Grenzwerthen $a_0 b$, $a_1 b \cdots a_m b \cdots$ und die aus ihnen gebildete Reihe convergirt zum Grenzwerthe ab.

Die hier bewiesenen Sätze zeigen in Verbindung mit denen von Nr. 3—5, dass man den Grenzwerth a einer convergenten unendlichen Reihe mit positiven Gliedern

$$a_0 + a_1 + \cdots$$

als die Summe der unbegrenzt vielen Zahlen a_0, $a_1 \cdots$ erklären darf. Er bleibt nämlich ungeändert, wenn man dieselben in beliebige Aufeinanderfolge bringt und sie vor dem letzten Grenzübergange $\lim n = +\infty$ in Gruppen von endlicher oder unendlicher Gliederzahl vereinigt. Auch bestehen die Sätze 1) und 2) in Nr. 3 gerade wie für Summen von endlicher Gliederzahl.

Nach dem zweiten Satze oben bleibt auch die distributive Eigenschaft des Productes zweier solchen Summen erhalten. Denn man darf, um das Product ab zu bilden, die Partialproducte $a_m b_n$ in jeder beliebigen Ordnung aneinanderreihen, weil der Grenzwerth der Reihe (9) bei gar keiner Umstellung ihrer Glieder sich ändert. Auch kann man nach dem ersten Satze dieselben irgendwie in unendliche Reihen vertheilen, diese summiren und schliesslich die Summe ihrer Summen bilden. Man drückt dies aus durch die Formel

$$\sum_0^\infty{}^m a_m \cdot \sum_0^\infty{}^n b_n = \sum_{m,n} a_m b_n, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \cdots$$

Sie lässt sich unmittelbar auf das Product einer jeden endlichen Anzahl von convergenten Reihen mit positiven Gliedern ausdehnen d. h. es ist

---

1) Nach Weierstrass vgl. Pincherle, Battaglini Giorn. mat. XVIII. p. 215.

2) Cauchy, Cours d'Analyse p. 141.

$$\sum_0^\infty{}_m a_m \cdot \sum_0^\infty{}_n b_n \cdot \sum_0^\infty{}_p c_p = \sum_{m,n,p} a_m b_n c_p, \qquad \left.\begin{matrix} m \\ n \\ p \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \cdots.$$

In der That finden wir

$$ab \cdot \sum_p c_p = \sum_{m,n} a_m b_n \cdot \sum_p c_p = \sum_{m,n,p} a_m b_n c_p \qquad \left.\begin{matrix} m \\ n \\ p \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \cdots,$$

so dass das links stehende Product gleich ist der Summe aus allen Gliedern $a_m b_n c_p$, deren jedes eben einmal und nur einmal in der rechts stehenden Reihe auftritt. U. s. f.

Von jetzt an dürfen wir die unendlichen systematischen Brüche und zwar sowohl die periodischen (S. 92), als auch die nicht-periodischen d. i. die irrationalen Zahlen (S. 157) als Summen von unendlich vielen rationalen Zahlen von der Form $c_n : e^n$ ansehen. Dies erstreckt sich auch auf den Fall, dass die Ganzen (c_0) eine negative Zahl sein sollten. Denn die Sätze in Nr. 5—7 gelten überhaupt für convergente Reihen, welche Glieder von beiden Vorzeichen, jedoch in unendlicher Anzahl bloss Glieder eines Zeichens enthalten. Fassen wir z. B. die convergenten Reihen, in welchen neben positiven Gliedern eine endliche Anzahl von negativen vorkommt, ins Auge, so können wir an denselben die nämlichen Schlüsse machen, wie in Nr. 5—7 an denen, welche bloss aus positiven Gliedern und etwaigen Nullen bestehen. Es bleibt nämlich dafür aufrecht der Satz am Beginne von Nr. 4 mit der einzigen Abänderung, dass jetzt der endliche Grenzwerth a auch 0 oder negativ sein kann.

Reihen, welche sowohl positive als auch negative Glieder in unbegrenzter Anzahl enthalten.

Es wird sich zunächst darum handeln, ob und unter welchen Umständen auch die Grenzwerthe von convergenten unendlichen Reihen, welche sowohl positive als auch negative Glieder in unbegrenzter Anzahl enthalten, als Summen derselben betrachtet werden können. Und zwar wollen wir zuerst an einem einfachen Beispiele nachweisen, dass das nicht immer zulässig ist.

8. Alternirende Reihen.

Satz. [1]) „Die unendliche Reihe

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots, \tag{10}$$

worin $a_0, a_1 \cdots a_n \cdots$ positive Zahlen bedeuten, convergirt, wenn diese Zahlen mit wachsendem Index beständig abnehmen und für

1) Der Satz von den alternirenden Reihen geht auf Leibniz zurück (vgl. R. Reiff, Geschichte d. unendl. Reihen 1889 S. 47). Die Formulirung desselben i. T. nach Cauchy l. c. p. 144. Dass die Glieder einer Reihe abwechselnd positiv

$\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0 haben. Der Grenzwerth a der unendlichen Reihe (10) ist grösser als jede Partialsumme aus einer geraden, kleiner als jede aus einer ungeraden Anzahl von Gliedern. Jeder Rest der Reihe ist seinem absoluten Betrage nach kleiner als sein erstes Glied.“

Beweis. Es sei

$$a_n > a_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2 \cdots)$$

und

$$\lim a_n = 0 \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty.$$

Wir setzen

$$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n = s_n.$$

Da

$$\begin{aligned} s_{2k} &= s_{2k-1} + a_{2k} &&= s_{2k-2} - (a_{2k-1} - a_{2k}) \\ s_{2k+1} &= s_{2k} - a_{2k+1} &&= s_{2k-1} + (a_{2k} - a_{2k+1}) \end{aligned} \qquad (k \geqq 1),$$

so ergiebt sich, dass s_{2k} mit wachsendem k beständig abnimmt: $s_0 > s_2 > s_4 \cdots$. Dabei ist aber $s_{2k} > 0$, da $s_{2k-1} > 0$. Somit existirt ein endlicher Grenzwerth

$$a = \lim s_{2k} \quad \text{bei} \quad k = +\infty.$$

Es zeigt sich ferner, dass s_{2k+1} mit wachsendem k beständig zunimmt:

$$s_1 < s_3 < s_5 \cdots,$$

während

$$s_{2k+1} < s_{2k} \leqq a_0.$$

Also existirt ein endlicher Grenzwerth

$$a' = \lim s_{2k+1} \quad \text{bei} \quad k = +\infty.$$

Nun ist $a = a'$, so dass

$$s_{2k} > a > s_{2k+1} \qquad (k = 0, 1, 2 \cdots).$$

Denn man findet zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$, so dass für $k > \mu$ $a_{2k} < \varepsilon$, also

$$0 < s_{2k} - s_{2k-1} < \varepsilon,$$

d. i.

$$\lim_{k=+\infty} (s_{2k} - s_{2k-1}) = 0.$$

Setzt man endlich

$$a = s_n + r_n,$$

wo

$$r_n = (-1)^{n+1} \{a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots\},$$

so folgt vermöge des soeben bewiesenen Satzes

$$0 < (-1)^{n+1} r_n < a_{n+1}.$$

---

und negativ sind und bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0 haben, ist zur Convergenz der Reihe nicht ausreichend. So divergirt die Reihe (10) i. T., wenn man setzt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Der Fehler, den man begeht, wenn man s_n anstatt a nimmt, ist absolut genommen kleiner, als das auf das letzte Glied in s_n folgende Glied der Reihe.

Beispiele. [1]) 1) Die unendliche Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots \tag{a}$$

convergirt und ihr Grenzwerth a liegt zwischen $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. [2]) Bringt man die Glieder derselben in die folgende Anordnung

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} + \cdots \tag{b}$$

so ist, wie wir jetzt zeigen wollen, auch diese unendliche Reihe convergent.

Bezeichnen wir die Summe der n ersten Glieder von (b) mit s'_n und betrachten zunächst nur die Partialsummen s'_{3k} und s'_{3k+2}, so entstehen sie auch aus der alternirenden Reihe

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1}\right) - \frac{1}{2k} + \cdots \tag{b*}$$

Die Glieder derselben nehmen bei wachsendem Index beständig ab und sinken unter jede positive Zahl; denn es ist

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} > \frac{1}{2k} > \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3}.$$

Die Reihe (b*) convergirt somit und ihr Grenzwerth a' ist grösser als $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$. Zugleich hat man

$$\lim s'_{3k} = \lim s'_{3k+2} = a' \quad \text{bei} \quad \lim k = +\infty$$

und wegen

$$s'_{3k+1} = s'_{3k} + \frac{1}{4k+1}$$

allgemein

$$\lim_{n=+\infty} s'_n = a'.$$

a' ist also der Grenzwerth der convergenten Reihe (b) und, wie man sieht, grösser als a: es hat sich der Grenzwerth der Reihe (a) bei der angegebenen Versetzung ihrer Glieder geändert.

Es ist leicht zu zeigen, dass $a' = \frac{3}{2}a$. — Setzt man

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = s_n,$$

so folgt

---

1) Die Reihen (b) und (d) führt Dirichlet (s. S. 250) an. Die Ermittelung des Grenzwerthes der ersteren und ähnlicher Reihen verdankt man M. Ohm (De nonnullis seriebus infinitis summandis 1839 und System d. Math. VIII. S. 124).

2) Es ist $a = l2$. Vgl. S. 267.

$$s_{4k} = \sum_1^k {}^r \left(\frac{1}{4r-3} - \frac{1}{4r-2} + \frac{1}{4r-1} - \frac{1}{4r}\right),$$

$$s'_{3k} = \sum_1^k {}^r \left(\frac{1}{4r-3} + \frac{1}{4r-1} - \frac{1}{2r}\right),$$

$$s'_{3k} - s_{4k} = \sum_1^k {}^r \left(\frac{1}{4r-2} - \frac{1}{4r}\right) = \frac{1}{2} \sum_1^{k-1} \left(\frac{1}{2r-1} - \frac{1}{2r}\right) = \frac{1}{2} s_{2k}.$$

Beim Grenzübergange $\lim k = +\infty$ ergiebt sich daraus

$$a' - a = \tfrac{1}{2} a, \qquad a' = \tfrac{3}{2} a.$$

2) Die unendliche Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt[m]{2}} + \frac{1}{\sqrt[m]{3}} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[m]{n}} + \cdots \tag{c}$$

convergirt ebenfalls, die Wurzeln positiv genommen. Dagegen hat die Reihe

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\sqrt[m]{3}} - \frac{1}{\sqrt[m]{2}} + \frac{1}{\sqrt[m]{5}} + \frac{1}{\sqrt[m]{7}} - \frac{1}{\sqrt[m]{4}} + \cdots \\ + \frac{1}{\sqrt[m]{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt[m]{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt[m]{2k}} + \cdots \end{aligned} \tag{d}$$

den Grenzwerth $+\infty$. Setzt man wieder

$$1 - \frac{1}{\sqrt[m]{2}} + \frac{1}{\sqrt[m]{3}} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[m]{n}} = s_n,$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt[m]{3}} - \frac{1}{\sqrt[m]{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[m]{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt[m]{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt[m]{2k}} = s'_{3k},$$

so ist

$$s'_{3k} - s_{2k} = \frac{1}{\sqrt[m]{2k+1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{2k+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[m]{4k-1}},$$

somit

$$s'_{3k} - s_{2k} > \frac{k}{\sqrt[m]{4k}} = \frac{k^{1-\frac{1}{m}}}{\sqrt[m]{4}}$$

und

$$\lim_{k=+\infty} s'_{3k} = +\infty,$$

also, wenn s'_n die Summe der n ersten Glieder in (d) bedeutet, wegen

$$s'_{3k+2} > s'_{3k+1} > s'_{3k}$$

auch

$$\lim_{n=+\infty} s'_n = +\infty.$$

9. Absolute und relative Convergenz der Reihen mit positiven und negativen Gliedern in unbegrenzter Anzahl.

Die Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{1}$$

enthalte sowohl positive, als negative Glieder in unendlicher Anzahl. Die ersteren mögen, in der Ordnung angeschrieben wie sie in (1) vorkommen, die Reihe

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_p + \cdots \quad (b_p > 0) \tag{2}$$

bilden; die letzteren ebenso die Reihe

$$-c_1 - c_2 - \cdots - c_q - \cdots \quad (c_q > 0). \tag{3}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \cdots + a_n &= s_n \\ b_0 + b_1 + \cdots + b_p &= t_p \\ c_1 + \cdots + c_q &= u_q, \end{aligned}$$

so folgt zunächst

$$s_n = t_{p_n} - u_{q_n}. \tag{4}$$

Daraus ergiebt sich, indem bei $\lim n = +\infty$ auch

$$\lim p_n = \lim q_n = +\infty,$$

sogleich das Folgende:

1) Convergiren die Reihen (2) und (3) und zwar zu den Grenzwerthen b, $-c$, so convergirt auch (1) und zwar ist der Grenzwerth der Reihe (1) $b - c$.

2) Convergirt nur eine der Reihen (2), (3), so hat die Reihe (1) stets einen unendlichen Grenzwerth.

3) Divergiren beide Reihen (2), (3), so lässt sich aus der Formel (4) im Allgemeinen nichts entnehmen, da

$$\lim_{n=+\infty} t_{p_n} = \lim_{n=+\infty} u_{q_n} = +\infty$$

ist (vgl. S. 166).

In der That zeigen die Beispiele der vorigen Nummer, dass in diesem Falle die Reihe (1) sowohl convergiren als divergiren kann.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Frage, unter welchen Umständen die unendliche Reihe (1) bei jeder beliebigen Anordnung ihrer Glieder convergent ist und stets denselben Grenzwerth liefert.

Satz. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$ bei jeder Anordnung ihrer Glieder convergirt, besteht in der absoluten Convergenz derselben. D. h. die absoluten Beträge $|a_n|$ der Reihenglieder müssen eine convergente Reihe bilden. Dann bietet sie auch immer denselben Grenzwerth dar.

Beweis. Dass die genannte Bedingung hinreichend sei, ist leicht einzusehen. Convergirt die unendliche Reihe

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| + \cdots \tag{5}$$

so convergiren die Reihen (2), (3), somit auch (1). Bringt man ihre Glieder in eine andere Anordnung

$$a_0' + a_1' + \cdots + a_n' + \cdots, \tag{6}$$

wodurch an Stelle der Reihen (2), (3) die folgenden treten

$$b_0' + b_1' + b_2' + \cdots, \quad -c_1' - c_2' - \cdots, \tag{6*}$$

so sind diese nach dem 3. Satze in Nr. 5 wieder convergent und haben dieselben Grenzwerthe wie (2) und (3). Man findet somit auch die Reihe (6) convergent und zwar dafür denselben Grenzwerth wie für (1), nämlich $b - c$.

Dass die in Rede stehende Bedingung auch nothwendig sei, ist leicht einzusehen. Soll nämlich die Reihe (6) divergiren, so muss mindestens eine von den beiden Reihen (6*), somit auch die Reihe (5) divergiren. — Dass im Falle der Convergenz der Reihe (5) die Reihe (6) stets denselben Grenzwerth hat, wie die Reihe (1), wird indirect bewiesen. Angenommen, die Reihe (5) divergire. Zunächst bemerken wir, dass neben der Reihe (5) nun beide Reihen (2) und (3) divergiren müssen. Denn würde nur eine von ihnen divergiren, so müsste die Reihe (1) einen unendlichen Grenzwerth haben, könnte also bei der in (1) vorliegenden Anordnung ihrer Glieder nicht convergiren. Es besteht nun der folgende Satz:[1])

---

1) Riemann, Werke S. 221. Nach Dini (Grundlagen f. e. Theorie d. Functionen u. s. w., deutsch v. Lüroth 1892 S. 132) lässt sich auch zeigen, dass sich die Glieder a_n so anordnen lassen, dass die Partialsummen s_n der Reihe Σa_n bei $\lim n = +\infty$ zwischen zwei gegebenen Unbestimmtheitsgrenzen, welche endlich oder unendlich sein können, schwanken und insbesondere bei $\lim n = +\infty$ einen bestimmt endlichen Grenzwerth haben. Genügen die Zahlen $K_0\ K_1\ K_2 \cdots$ den Bedingungen

$$K_0 \geqq K_1 \quad K_1 \leqq K_2 \quad K_2 \geqq K_3 \quad K_3 \leqq K_4$$

u. s. w., so lassen sich die Glieder $b_p\ c_q$ so aneinanderreihen, dass die i. T. aufgeführten Partialsummen der zu bildenden Reihe

$$S_0 > K_0 \quad S_1 > K_2 \quad S_2 > K_4 \ \cdots\ S_r > K_{2r} \cdots$$
$$T_1 < K_1 \quad T_2 < K_3 \quad T_3 < K_5 \ \cdots\ T_r < K_{2r-1} \cdots$$

und zwar die ersteren gerade grösser als die bezüglichen K_{2r}, die letzteren gerade kleiner als die bezüglichen K_{2r-1} sind. Es gelten somit die Formeln

$$K_{2r-1} - T_r \leqq c_{l_r} \quad S_r - K_{2r} \leqq b_{k_r} \qquad (r = 1, 2 \cdots).$$

Nimmt man

$$K_{2r} = K_0 \quad K_{2r-1} = K_1 \qquad (r = 1, 2 \cdots)$$

und $K_0 > K_1$ an, so sind K_0, K_1 die Unbestimmtheitsgrenzen der Partialsummen der neuen Reihe bei $\lim n = +\infty$. Lässt man aber die Zahlen K_{2r} $(r = 0, 1 \cdots)$ mit wachsendem r zunehmen und zwar ins Unendliche, so haben jene Partialsummen bei $\lim n = +\infty$ die obere Unbestimmtheitsgrenze $+\infty$. Ist dabei $K_{2r+1} = K_{2r}$ $(r = 0, 1 \cdots)$, so hat Σa_n den Grenzwerth $+\infty$. U. s. f. — Eine nähere Untersuchung über die Veränderungen des Grenzwerthes bedingt convergirender Reihen bei Umstellung ihrer Glieder giebt A. Pringsheim, Math. Ann. XXII S. 455f.

Wenn die Reihe (1) sowohl positive als negative Glieder in unbegrenzter Anzahl enthält, wenn sowohl die ersteren für sich, als die letzteren für sich eine divergente Reihe bilden und dabei die Bedingung erfüllt ist, dass

$$\lim_{n=+\infty} a_n = 0 \tag{7}$$

ist, so lassen sich die Glieder von (1) so anordnen, dass die neue Reihe convergirt und zwar zu irgend einem vorgegebenen Grenzwerthe K.

Beweis. Ist $K \geqq 0$, so entnehmen wir aus der Reihe (2) soviele Glieder $b_0, b_1 \cdots b_{k_0}$, dass

$$b_0 + b_1 + \cdots + b_{k_0-1} \leqq K, \quad S_0 = b_0 + b_1 + \cdots b_{k_0} > K,$$

wobei k_0 auch 0 sein kann. Wegen der Divergenz der Reihe (2) ist dies stets möglich. Ist $K < 0$, so ist schon $b_0 > K$; es sei also $S_0 = b_0$. Auf die Glieder, deren Summe mit S_0 bezeichnet ist, lasse man so viele Glieder $c_1 \cdots c_{l_1}$ aus (3) folgen, dass

$$S_0 - c_1 - \cdots - c_{l_1-1} \geqq K,$$
$$T_1 = S_0 - c_1 - \cdots - c_{l_1} < K$$

ist. Auf die so ausgewählten $k_0 + l_1 + 1$ Glieder lasse man wieder so viele aus (2) $b_{k_0+1} \cdots b_{k_1}$ folgen, dass die Summe aller Glieder gerade K übersteigt, und hierauf so viele aus (3): $-c_{l_1+1} \cdots -c_{l_2}$, dass die Summe aller gerade unter K sinkt. U. s. f. Im Allgemeinen werden somit für die neue Reihe die Glieder gewählt:

$$b_{k_{r-1}+1} + b_{k_{r-1}+2} + \cdots + b_{k_r}$$
$$-c_{l_r+1} - c_{l_r+2} - \cdots - c_{l_{r+1}} \qquad (r \geqq 1).$$

Wir erhalten demnach neben S_0 T_1 u. s. f. allgemein die nachstehenden Partialsummen

$$S_{r-1} - c_{l_{r-1}+1} - \cdots - c_{l_r} = T_r \tag{8}$$
$$T_r + b_{k_{r-1}+1} + \cdots + b_{k_r} = S_r \tag{9}$$
$$S_r - c_{l_r+1} - \cdots - c_{l_{r+1}} = T_{r+1}. \tag{10}$$

Dabei soll

$$T_r < K \quad T_r + c_{l_r} \geqq K, \quad \text{also} \quad 0 < K - T_r \leqq c_{l_r} \tag{11}$$
$$S_r > K \quad S_r - b_{k_r} \leqq K, \quad \text{also} \quad 0 < S_r - K \leqq b_{k_r} \tag{12}$$

sein. Vermöge der Formel (7) gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ so, dass für

$$n > \mu \quad |a_n| < \varepsilon$$

ist. Da weder b_n noch $-c_n$ in (1) vor a_n stehen können, so ist neben

$$n > \mu \quad \text{auch} \quad b_n < \varepsilon \quad \text{und} \quad c_n < \varepsilon.$$

Wir können demnach eine ganze Zahl h so wählen, dass für

$$r \geqq h \quad b_{k_r} < \varepsilon \quad \text{und} \quad c_{l_r} < \varepsilon$$

ist. Mithin ist neben $r \geqq h$ nach (11) bezw. (12)

$$0 < K - T_r < \varepsilon, \quad 0 < S_r - K < \varepsilon. \tag{13}$$

Es bestehen daher die Formeln:

$$\lim_{r=+\infty} T_r = K, \quad \lim_{r=+\infty} S_r = K.$$

Die S_r und T_r stellen aber nur eine Auswahl unter den Partialsummen der aus den Gliedern von (1) gebildeten neuen Reihe, die wir schematisch mit

$$a_0' + a_1' + \cdots + a_n' + \cdots$$

bezeichnen wollen, dar. Setzen wir nämlich

$$a_0' + a_1' + \cdots + a_n' = s_n',$$

so ist

$$T_r = s'_{k_{r-1}+l_r}, \qquad S_r = s'_{k_r+l_r}.$$

Durchläuft n die Werthe $k_{r-1} + l_r$ bis $k_r + l_r - 1$, so zeigen die Formeln (9) und (12), dass

$$T_r \leqq s_n' \leqq K, \quad \text{somit} \quad 0 \leqq K - s_n' \leqq K - T_r \tag{14}$$

ist. Geht n weiter von $k_r + l_r$ bis $k_r + l_{r+1} - 1$, so ist nach den Formeln (10) und (11)

$$K \leqq s_n' \leqq S_r, \quad \text{somit} \quad 0 \leqq s_n' - K \leqq S_r - K. \tag{15}$$

Stellt man die Formeln (14) und (15) mit (13) zusammen, so erkennt man, dass wenn $r \geqq h$ d. i. $n \geqq k_{h-1} + l_h$ ist, alsdann $|s_n' - K| < \varepsilon$ sein muss. Mithin gilt in der That die Formel

$$\lim_{n=+\infty} s_n' = K, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Vermöge des vorstehenden Satzes haben wir die convergenten Reihen in zwei Classen zu scheiden:[1]) die absolut (oder unbedingt) convergenten, wofür die aus den absoluten Beträgen der Glieder gebildete Reihe convergirt (wozu demnach auch alle convergenten Reihen zu zählen sind, die nur Glieder mit einem Zeichen in unbegrenzter Anzahl enthalten) und die relativ (oder bedingt) convergenten, wofür die genannte Reihe divergirt. Der Grenzwerth einer relativ convergenten Reihe hängt von der Anordnung ihrer Glieder ab. In der That gehören die Reihen (a), (c) in Nr. 8 zur zweiten Classe. — Werfen wir jetzt einen Blick auf die Gesammtheit der unendlichen Reihen, so bemerken wir, dass sie in drei Classen zerfallen. Zu den soeben erwähnten beiden Classen tritt nämlich nur noch eine, die der unbedingt divergenten Reihen d. i. derjenigen,

1) Diese Eintheilung der convergenten unendlichen Reihen in zwei Classen verdankt man Dirichlet (vgl. Werke I. S. 318 — aus dem Jahre 1837). Die Bezeichnung „relativ" convergent nach De la Vallée-Poussin (Journ. de Math. 1892 S. 453). — Dass die Reihe (1) convergirt, wenn die absoluten Beträge ihrer Glieder eine convergente Reihe bilden, hat schon Cauchy bemerkt (Oeuvres 2. sér. III. S. 129, X. S. 49).

welche bei jeder Anordnung ihrer Glieder divergent bleiben. Dazu gehören insbesondere jene Reihen, deren allgemeines Glied a_n bei $\lim n = +\infty$ einen von Null verschiedenen Grenzwerth oder gar keinen besitzt.

Die absolut convergenten Reihen können als Summen ihrer Glieder betrachtet werden (was wir sogleich begründen werden), die relativ convergenten nur in uneigentlichem Sinne, mit Verzicht auf einige wesentliche Eigenschaften der endlichen Summen.

10. Sätze über die absolut convergenten Reihen. Sie entsprechen den Sätzen über die Reihen mit positiven Gliedern in Nr. 4—7, aus welchen sie sich unmittelbar ableiten lassen.

1) „Wenn die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{16}$$

absolut convergirt und darin Glieder von entgegengesetzten Zeichen vorkommen, so hat man

$$|\Sigma a_n| < \Sigma |a_n|."$$

Nach dem 2. Satze in Nr. 3, da

$$-|a_n| \leqq a_n \leqq |a_n|.$$

2) „Convergirt neben (16) auch die Reihe $b_0 + b_1 + \cdots$ absolut, so convergirt auch die Reihe

$$a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + \cdots + a_n + b_n + \cdots$$

absolut."

3) „Convergirt (16) absolut und bedeuten $c_0, c_1 \cdots c_n \cdots$ Zahlen, die dem absoluten Betrage nach unter einer Zahl C liegen, so convergirt auch die Reihe $a_0 c_0 + a_1 c_1 + \cdots$ absolut." — Denn nach dem 3. Satze in Nr. 4 convergirt die Reihe

$$|a_0 c_0| + |a_1 c_1| + \cdots + |a_n c_n| + \cdots,$$

da

$$|c_n| < C.$$

4) „Hebt man aus einer absolut convergenten Reihe eine unendliche Folge von Gliedern auf beliebige Weise heraus, so bilden auch sie eine absolut convergente Reihe." — Nach dem 1. Satze in Nr. 5, anzuwenden auf Reihe (5).

5) „Vertheilt man die Glieder von (16) in eine endliche Anzahl von Reihen, so convergiren die unendlichen unter ihnen absolut und die Summe aus den Summen der endlichen und den Grenzwerthen der unendlichen Partialreihen ist gleich dem Grenzwerthe von (16)." — Beweis wie zum 4. Satze in Nr. 5.

6) „Es sei die Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{16}$$

absolut convergent und a ihr Grenzwerth. Vertheilt man ihre Glieder, ohne eines zu übergehen, in unendlich viele Reihen

$$\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \cdots + a_n^{(0)} + \cdots \\ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \cdots + a_n^{(1)} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + \cdots + a_n^{(m)} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{17}$$

so convergirt jede unendliche unter ihnen absolut und die aus den Summen der endlichen und den Grenzwerthen der unendlichen Reihen des Schemas (17) (welche zwei Arten von Zahlen der Reihe nach mit $a^{(0)}$, $a^{(1)} \cdots a^{(m)} \cdots$ bezeichnet seien) gebildete Reihe convergirt ebenfalls absolut und zwar zum Grenzwerthe a." [1])

7) Convergiren die beiden unendlichen Reihen

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m + \cdots, \\ b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \end{array} \tag{18}$$

absolut und zwar bez. zu den Grenzwerthen a, b, so convergirt jede aus den Gliedern $a_m b_n$ gebildete einfach unendliche Reihe, wie

$$\begin{array}{r} a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + \cdots + a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots \\ + a_r b_{n-r} + \cdots + a_n b_0 + \cdots \end{array} \tag{18*}$$

absolut und zwar zum Grenzwerthe ab." [2])

Die Sätze 6) und 7) ergeben sich aus dem Hilfssatze in Nr. 11 auf die nämliche Weise, wie die ihnen entsprechenden Sätze in Nr. 7 mit dem Satze in Nr. 6.

Der Satz 7) lässt sich auch aus dem 2. Satze in Nr. 7 herleiten, indem man die Glieder der Reihen (18) in die Reihen der positiven und der negativen zerlegt. Dadurch erscheinen a b als Differenzen, die man auf die gewöhnliche Weise multiplicirt. Jedes der dadurch erhaltenen vier Glieder lässt sich dann nach dem genannten Satze wieder in eine unendliche Reihe verwandeln, wodurch man schliesslich zur Reihe (18*) gelangt.

11. Hilfssatz. [3])

1) Es sei vorgelegt das Schema (17), welches eine unbegrenzte Anzahl von unendlichen Reihen aus beliebigen reellen Zahlen enthält. Es soll jedoch die folgende Eigenschaft haben. Ersetzt man jedes Glied $a_n^{(m)}$ durch seinen absoluten Betrag $A_n^{(m)}$, d. h. bildet man das Schema

$$\begin{array}{l} A_0^{(0)} + A_1^{(0)} + \cdots + A_n^{(0)} + \cdots \\ A_0^{(1)} + A_1^{(1)} + \cdots + A_n^{(1)} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_0^{(m)} + A_1^{(m)} + \cdots + A_n^{(m)} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \end{array} \tag{19}$$

---

1) Nach Weierstrass (vgl. Pincherle a. a. O. S. 221).

2) Cauchy, Cours d'Analyse p. 147.

3) Durch diesen von O. Stolz gegebenen Satz wird der Doppelreihensatz von Cauchy (Cours d'Analyse p. 541) in zwei einfachere Sätze zerlegt.

so convergiren sämmtliche Horizontalreihen und zwar bezüglich zu den Grenzwerthen $A^{(0)}$, $A^{(1)} \cdots A^{(m)} \cdots$ und die aus diesen Zahlen gebildete Reihe $A^{(0)} + A^{(1)} \cdots$ convergirt ebenfalls."

„Unter dieser Voraussetzung convergiren absolut sämmtliche Horizontalreihen des Schemas (17) und die aus ihren Grenzwerthen $a^{(0)}$, $a^{(1)} \cdots a^{(m)} \cdots$ gebildete Reihe. Die Summe der letzteren Reihe sei a."

„Es convergirt absolut die unendliche Reihe

$$a_0^{(0)} + a_0^{(1)} + a_1^{(0)} + \cdots + a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}^{(1)} + a_n^{(0)} + \cdots \qquad (20)$$

(worin die Glieder $a_n^{(m)}$ so angeordnet sind, dass beim Fortschreiten von links nach rechts die Summe $m + n$ nicht abnimmt) und zwar zum Grenzwerthe a."

2) „Und umgekehrt, convergirt die Reihe (20) absolut und zwar zu einem Grenzwerthe a, so convergiren absolut sämmtliche Horizontalreihen in (17) und die aus ihren Grenzwerthen gebildete Reihe, letztere zum Grenzwerthe a."

Der vorstehende Satz kann in ähnlicher Weise, wie der Hilfssatz in Nr. 6, mit Hilfe der Gleichung (7) auf S. 240 bewiesen werden.[1]) Bequemer ist es indess, den genannten Satz durch Zurückführung auf jenen Hilfssatz zu begründen. Wir stellen dem Schema (17) zwei andere an die Seite: das eine mit dem allgemeinen Gliede $b_n^{(m)}$, wobei

$$b_n^{(m)} = a_n^{(m)} \text{ oder } 0, \text{ je nachdem } a_n^{(m)} \text{ positiv ist oder nicht,}$$

das andere mit dem allgemeinen Gliede $c_n^{(m)}$, wobei

$$c_n^{(m)} = -a_n^{(m)} \text{ oder } 0, \text{ je nachdem } a_n^{(m)} \text{ negativ ist oder nicht.}$$

Zu 1). Zufolge der Convergenz der Horizontalreihen in (19) convergiren alle unendlichen Reihen

$$\left.\begin{aligned} b_0^{(m)} + b_1^{(m)} + \cdots + b_n^{(m)} + \cdots \\ c_0^{(m)} + c_1^{(m)} + \cdots + c_n^{(m)} + \cdots \end{aligned}\right\} (m = 0, 1, 2 \cdots). \qquad \begin{aligned}(21)\\(22)\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Summe der ersteren beziehentlich mit $b^{(m)}$, die der letzteren beziehentlich mit $c^{(m)}$, so convergiren auch die beiden Reihen

$$b^{(0)} + b^{(1)} + \cdots + b^{(m)} + \cdots$$
$$c^{(0)} + c^{(1)} + \cdots + c^{(m)} + \cdots,$$

denn es ist sowohl $b^{(m)} \leqq A^{(m)}$, als auch $c^{(m)} \leqq A^{(m)}$. Endlich ist nach Nr. 6

$$\sum_0^\infty {}^m b^{(m)} = b_0^{(0)} + b_0^{(1)} + b_1^{(0)} + \cdots + b_0^{(n)} + \cdots + b_n^{(0)} + \cdots \qquad (23)$$

$$\sum_0^\infty {}^m c^{(m)} = c_0^{(0)} + c_0^{(1)} + c_1^{(0)} + \cdots + c_0^{(n)} + \cdots + c_n^{(0)} + \cdots. \qquad (24)$$

---

1) Vgl. Stolz, Vorlesungen über allg. Arithmetik I. S. 244.

Andererseits haben wir

$$a^{(m)} = b^{(m)} - c^{(m)} \qquad (m = 0, 1, 2 \cdots), \tag{25}$$

somit

$$a = \sum_0^\infty {}_m a^{(m)} = \sum_0^\infty {}_m b^{(m)} - \sum_0^\infty {}_m c^{(m)} = b_0^{(0)} - c_0^{(0)} + b_0^{(1)} - c_0^{(1)} + \cdots.$$

Die rechts stehende Reihe, welche nach dem 2. Satze in Nr. 10 absolut convergirt, geht durch Umstellung der Glieder in die Reihe (20) über, also hat diese den nämlichen Grenzwerth, wie jene, mithin den Grenzwerth a.

Zu 2). Weiss man umgekehrt, dass die Reihe (20) absolut convergirt, so convergiren auch die Reihen auf den rechten Seiten der Gleichungen (23) und (24). Bezeichnen wir ihre Summen bezw. mit b, c, so ist

$$a = b - c. \tag{26}$$

Aus der Convergenz der Reihe auf der rechten Seite von (23) folgt nach Nr. 6 die Convergenz aller Reihen (21) und die Gleichung

$$b = \sum_0^\infty {}_m b^{(m)}.$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich die Convergenz aller Reihen (22) und die Gleichung

$$c = \sum_0^\infty {}_m c^{(m)}.$$

Demnach ist nach (26) und (25)

$$a = \sum_0^\infty {}_m b^{(m)} - \sum_0^\infty {}_m c^{(m)} = \sum_0^\infty {}_m (b^{(m)} - c^{(m)}) = \sum_0^\infty {}_m a^{(m)},$$

w. z. b. w.

Wir folgern aus dem vorstehenden Satze unmittelbar (vgl. S. 241) den Doppelreihensatz von Cauchy:

Vorausgesetzt, dass alle Horizontalreihen des Schemas (17) convergiren und dass ihre Summen $a^{(0)}, a^{(1)} \cdots a^{(m)} \cdots$ auch eine convergente Reihe bilden, und dass diese beiden Eigenschaften bestehen bleiben, wenn man jedes Glied in (17) durch seinen absoluten Betrag ersetzt d. i. auch vom Schema (19) gelten; so kann man schliessen

1) dass alle Verticalreihen in (17) absolut convergiren;

2) dass ihre Summen

$$a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(1)} + \cdots \qquad (n = 0, 1, 2 \cdots)$$

eine absolut convergente Reihe bilden;

3) dass die Summe der Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$ gleich ist der von $a^{(0)} + a^{(1)} + \cdots$.

Wenn das Schema (17) der soeben erwähnten Bedingung genügt, so hat es mithin dieselbe Eigenschaft, wie ein endliches Schema von $(m+1)$ Zeilen zu je $(n+1)$ Gliedern: Es ist die Summe der Summen der Horizontalreihen gleich der Summe der Summen der Verticalreihen. Es kann somit ein solches Schema nicht von obiger Beschaffenheit sein, wenn die genannten Summen von einander abweichen. Dies tritt ein bei folgendem Beispiel.[1] Es sei

$$a_n^{(m)} = \frac{1}{m+1}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n - \frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{m}\right)^n \qquad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 1, 2 \cdots.$$

Die m^{te} Horizontalreihe hat die Summe

$$\frac{1}{m+1}\sum_1^\infty {}_n \left(\frac{m}{m+1}\right)^n - \frac{1}{m}\sum_1^\infty {}_n \left(\frac{m-1}{m}\right)^n = \frac{m}{m+1} - \frac{m-1}{m} \qquad (m = 1, 2 \cdots),$$

sodass die Summe aller Horizontalreihen nach dem 2. Beispiele auf S. 229 gleich

$$\lim_{m=+\infty} \frac{m}{m+1} = 1$$

ist. Die n^{te} Verticalreihe hat nach demselben Beispiele die Summe

$$\lim_{m=+\infty} \frac{1}{m+1}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n = 0 \qquad (n = 1, 2 \cdots),$$

somit ist die Summe aller Verticalreihen gleich 0. Man wird bemerken, dass von einem bestimmten an alle Glieder einer jeden Horizontalreihe positiv, einer jeden Verticalreihe negativ sind, so dass sowohl die eine, als auch die andere absolut convergirt.

12. Ueber die Grenzwerthe einiger unendlichen Producte aus positiven Factoren.

Satz. 1) „Es sei $0 < a_n < 1$ und

$$p_n = (1-a_0)(1-a_1)\cdots(1-a_n) = \prod_0^n {}_r (1-a_r).$$

Beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ hat p_n stets einen endlichen Grenzwerth und zwar ist er positiv und kleiner als 1, wenn die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots \tag{a}$$

convergirt; dagegen Null, wenn sie divergirt."

2) „Es sei $a_n > 0$ und

$$q_n = (1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_n) = \prod_0^n {}_r (1+a_r).$$

Beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ hat q_n stets einen Grenzwerth

1) F. Arndt in Grunert Archiv XI. S. 319.

und zwar ist er eine positive Zahl > 1, wenn die unendliche Reihe (a) convergirt; dagegen $+\infty$, wenn sie divergirt."

Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem Satze 6) auf S. 180, wonach, wenn $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_n$ gleichbezeichnete reelle Zahlen, jede zwischen -1 und $+1$ gelegen, bedeuten,

$$(1+\mathfrak{a}_1)(1+\mathfrak{a}_2)\cdots(1+\mathfrak{a}_n) > 1 + \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n \tag{b}$$

ist.

Betrachten wir die Zahlen $p_0, p_1, \cdots p_n$, so haben dieselben, da

$$0 < p_{n+1} < p_n, \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty$$

einen endlichen Grenzwerth $p \geqq 0$ (VII. 14). Convergirt die Reihe (a), so gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl m, so dass

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+r} < \varepsilon, \tag{c}$$

was für einen der Werthe 1, 2 $\cdots$ die Veränderliche r auch erhalten mag. Nun ist nach (b)

$$p_{m+r} > p_m(1 - a_{m+1} - a_{m+2} - \cdots - a_{m+r}) > p_m(1-\varepsilon);$$

somit

$$p \geqq p_m(1-\varepsilon),$$

also p sicher positiv. Andererseits ist $p_{m+r} < p_m < 1$, folglich $p \leqq p_m < 1$, also $p < 1$. — Divergirt die unendliche Reihe (a), so gehört zu jeder Zahl $G > 0$ eine Zahl $\mu > 0$, so dass

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n > G, \quad \text{wenn nur } n > \mu. \tag{d}$$

Nun ist

$$1 - a_n < \frac{1}{1+a_n},$$

somit

$$p_n < \frac{1}{q_n} < \frac{1}{1 + a_0 + a_1 + \cdots + a_n} < \frac{1}{1+G},$$

wenn nur $n > \mu$. D. h. es ist $p = 0$.

Da $q_{n+1} > q_n > 1$, so haben die q_n bei $\lim n = +\infty$ einen positiven Grenzwerth $q > 1$. Wenn die unendliche Reihe (a) convergirt, so bemerke man nach (c), dass für $n > m$

$$1 + a_n < \frac{1}{1-a_n},$$

somit

$$q_{m+r} < \frac{q_m}{(1-a_{m+1})\cdots(1-a_{m+r})} < \frac{q_m}{1-\varepsilon}.$$

In diesem Falle ist demnach q endlich. — Wenn (a) divergirt, so folgt aus (b) und (d), dass

$$q_n > 1 + a_0 + a_1 + \cdots + a_n > 1 + G \qquad (n > \mu)$$

ist, somit dass $\lim q_n = +\infty$ ist.

13. Ein Satz über ganze Potenzreihen.

Wir wollen in diesem Werke nicht auf die allgemeine Theorie der ganzen Potenzreihen eingehen; es mögen bloss die unter ihnen am nächsten liegenden, die Exponential-, die binomische und die logarithmische Reihe Erwähnung finden, um zugleich als Beispiele für einige der vorhin aufgeführten Sätze zu dienen. In die Ableitung der letzten von diesen Reihen greift indess ein allgemeiner Satz über ganze Potenzreihen ein, welchen wir sogleich hier vorführen wollen.

Satz. „Convergirt die ganze Potenzreihe

$$a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (m \geqq 1), \tag{a}$$

die kein von x unabhängiges Glied enthält, absolut für alle x, deren Betrag unter einer gegebenen positiven Zahl R liegt, und wird ihre Summe mit $f(x)$ bezeichnet, so hat man

$$\lim_{x=0} f(x) = 0 \tag{b}$$

d. h. jeder positiven Zahl ε entspricht eine andere δ so, dass neben $|x| < \delta$ stets $|f(x)| < \varepsilon$ ist.“[1])

Beweis. Bedeutet R' eine positive Zahl kleiner als R, so convergirt die Reihe (a) für $x = R'$; daher liegen ihre Glieder dem Betrage nach sämmtlich unter e i n e r positiven Zahl g (vgl. S. 271 Uebung 6)). Setzen wir $|x| = X$ und allgemein $|a_n| = A_n$, so ist mithin

$$A_n R'^n < g, \quad \text{also} \quad A_n X^n < g\,(X:R')^n \qquad (n = m,\ m+1 \cdots).$$

Wir finden demnach, wenn X kleiner als R' angenommen wird,

$$|f(x)| \leqq \sum_m^\infty A_n X^n < g\left(\frac{X}{R'}\right)^m + g\left(\frac{X}{R'}\right)^{m+1} + \cdots.$$

Die letzte Reihe ist eine geometrische und lässt sich daher nach Nr. 1 summiren. Es ist also

$$|f(x)| < g\left(\frac{X}{R'}\right)^m : \left(1 - \frac{X}{R'}\right). \tag{c}$$

Setzt man $X : R' = 1 : \mu$, so ist $\mu > 1$. Während μ ins Unendliche wächst, hat die rechte Seite von (c) bekanntlich den Grenzwerth Null, d. h. es lässt sich der Zahl $\varepsilon > 0$ eine andere $G > 0$ so zuordnen, dass die rechte Seite von (c) kleiner ist als ε, wenn nur $\mu > G$ ist. Mithin ist, wenn nur $X < R' : G$ ist, $|f(x)| < \varepsilon$.

NB. Man glaube ja nicht, dass der vorstehende Satz darin seinen Grund habe, dass $f(0) = 0$ ist. Dass er mit diesem Umstande nichts zu thun hat, ersehen wir schon durch Betrachtung der unendlichen Reihe

---

1) Wir brauchen im Folgenden die Formel (b) nur für den Fall, dass x ein Stammbruch $1:k$ ist. Es würde demnach genügen in (b) $x = 1:k$ zu setzen und die natürliche Zahl k ins Unendliche wachsen zu lassen. Der Beweis des Satzes wird indess durch diese Annahme nicht vereinfacht.

$$(1-x)+(1-x)x+\cdots+(1-x)x^n+\cdots,$$

deren Grenzwerth im Falle, dass sie convergirt, mit $g(x)$ bezeichnet sei. Dann ist $g(1)=0$, dagegen ist, wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt, zufolge des Satzes 1) auf S. 228 $g(x)=1$. Während für $x=1$ alle Glieder der soeben erwähnten Reihe verschwinden, hat ihre Summe für alle zwischen -1 und $+1$ gelegenen Werthe von x dennoch den Werth 1; es ist mithin $\lim\limits_{x=1-0} g(x)=1$.

14. Entwickelung der Exponentialfunction e^x in eine ganze Potenzreihe.

Satz. Die Exponentialfunction e^x wird für jeden Werth von x durch die beständig convergente ganze Potenzreihe

$$1+x+\frac{x^2}{n!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{1}$$

dargestellt.

Zunächst bemerken wir, dass die Reihe (1) für jeden Werth von x absolut convergirt. Setzen wir $|x|=X$, so erhalten wir aus (1) die Reihe

$$1+X+\frac{X^2}{2!}+\cdots+\frac{X^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{X^n}{n!}+\cdots. \tag{2}$$

Der Quotient der beiden zuletzt stehenden Glieder derselben ist $X:n$, hat also bei $\lim n=+\infty$ den Grenzwerth 0; die Reihe (2) convergirt also für jedes X (S. 236), somit die Reihe (1) für jedes x. Die Summe der Reihe (1) werde vorläufig mit $E(x)$ bezeichnet; ferner sei

$$1+\sum_1^n{}_r\frac{x^r}{r!}=f_n(x), \quad \text{so dass} \quad \lim_{n=+\infty} f_n(x)=E(x) \tag{3}$$

ist.

Nun hatten wir in VIII. 14 die Formel

$$\lim_{n=+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x. \tag{4}$$

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass

$$\lim_{n=+\infty}\left\{f_n(x)-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}=0 \tag{5}$$

ist. Daraus folgt dann vermöge der Formeln (3) und (4), dass

$$E(x)-e^x=0 \quad \text{d. i.} \quad e^x=1+\sum_1^\infty{}_r\frac{x^r}{n!} \tag{6}$$

ist.

Um die Formel (5) zu beweisen, bemerkt man, dass nach VIII. 3

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \sum_2^n {}_r \binom{n}{r}\left(\frac{x}{n}\right)^r$$

$$= 1 + x + \sum_2^n {}_r \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\frac{x^r}{r!}$$

ist. Man hat somit

$$f_n(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_2^n {}_r \left\{1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\right\}\frac{x^r}{r!}$$

und weiter

$$\left|f_n(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leqq \sum_2^n {}_r \left\{1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\right\}\frac{X^r}{r!}. \quad (7)$$

Nach den Sätzen 6) auf S. 180 und 8) auf S. 36 ist

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right) > 1 - \left[\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots\frac{r-1}{n}\right]$$

$$1 + 2 + \cdots + (r-1) = \tfrac{1}{2}(r-1)r,$$

also

$$1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right) < \frac{r(r-1)}{2n}.$$

Demnach ergiebt sich aus (7), dass

$$\left|f_n(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| < \frac{1}{2n}\sum_2^n {}_r \frac{X^r}{(r-2)!} < \frac{1}{2n}X^2E(X) \quad (8)$$

ist. Nun hat $X^2E(X):2n$ bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth Null, um so mehr also (S. 166) das erste Glied in den Beziehungen (8) d. i. es besteht die Formel (5).

Für $x = 1$ erhalten wir aus (6) die Formel

$$e = 1 + \sum_1^\infty {}_r \frac{1}{r!}, \quad (9)$$

welche zur numerischen Berechnung von e dient.[1] Man kann nämlich nicht allein jedes Glied dieser Reihe aus dem vorhergehenden durch eine einzige Division erhalten, sondern auch ihren Rest mit Hilfe des zuletzt berechneten Gliedes abschätzen. In der That ist

$$\sum_{n+1}^\infty {}_r \frac{1}{r!} < \frac{1}{n+1\,!}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right\} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n!}. \quad (10)$$

1) Die Rechnung ist durchgeführt bei Lüroth (Vorl. üb. num. Rechnen S. 67).

Aus den Beziehungen (9) und (10) kann man nach Fourier[1]) schliessen, dass e eine irrationale Zahl ist. Nehmen wir an, es sei e rational und zwar in reducirter Form

$$e = m : n \qquad (n \geqq 1).$$

Nach (9) ist

$$n!\, e = n! + \sum_1^n{}^r (r+1) \cdots n + n! \sum_{n+1}^{\infty}{}^r \frac{1}{r!}\cdot$$

Diese Gleichung ist aber unmöglich, da alle Glieder mit Ausnahme des letzten, welches nach (10) kleiner als $1:n$ ist, ganze Zahlen sein müssten. Mithin ist die Zahl e irrational.

15. Summirung der binomischen Reihe für die Werthe des Argumentes x zwischen -1 und $+1$.[2])

Setzen wir in der Formel (a) auf S. 187 $a = 1$ $b = x$ und schreiben für m r bezw. μ n, so erhalten wir die Gleichung

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu_1 x + \cdots + \mu_n x^n + \cdots + \mu_{\mu-1} x^{\mu-1} + x^{\mu}, \quad (1)$$

wobei der n^{te} Binominalcoefficient μ_n nach der Formel

$$\mu_n = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdots n} \quad (2)$$

zu berechnen ist. Hieraus ist ersichtlich, dass $\mu_{\mu} = 1$ ist und dass wenn wir für n eine ganze Zahl grösser als μ setzen, $\mu_n = 0$ wird.

Die rechte Seite der Gleichung (2) hat auch einen Sinn, wenn wir uns unter μ irgend eine reelle Zahl vorstellen. Sie verschwindet jedoch für gar keinen Werth von n, wenn μ eine andere als eine ganze positive Zahl ausser 0 ist. — Der Gleichförmigkeit wegen führen wir noch das Zeichen μ_0 ein, das stets gleich 1 sein soll. Anstatt μ_n schreibt man auch $\binom{\mu}{n}$.

Ertheilen wir μ einen reellen, von x unabhängigen Werth, der weder 0 noch eine natürliche Zahl ist, so läuft die binomische Reihe

$$1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \cdots + \mu_n x^n + \cdots \quad (3)$$

ohne Ende fort. Für $\mu = 0$ liefert sie 1. $\binom{-1}{n}$ ist nach (2) gleich $(-1)^n$; für $\mu = -1$ geht also die Reihe (3) in die geometrische

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

über, welche nach S. 228 für jeden Werth von x zwischen -1 und $+1$ convergirt und die Summe $(1+x)^{-1}$ hat. Wir fragen nun

---

1) Vgl. Stainville, Mélanges d'analyse 1815, S. 339.

2) Der hier gegebene Beweis des binomischen Satzes rührt im Princip von Euler (N. Comm. Acad. Petropol. XIX, p. 103) her.

zunächst, unter welcher Bedingung die allgemeine Reihe (3) absolut convergirt d. i. die Reihe

$$1 + |\mu_1| X + |\mu_2| X^2 + \cdots + |\mu_n| X^n + \cdots,$$

wo $X = |x|$ ist, convergirt. Darüber giebt schon das Convergenzkriterium auf S. 236 Aufschluss. Wir bilden mithin den Quotienten

$$\frac{|\mu_n| X^n}{|\mu_{n-1}| X^{n-1}} = \left|\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\right| X. \tag{4}$$

Da nach (2)

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} = \frac{\mu - n + 1}{n} = -\left(1 - \frac{\mu+1}{n}\right) \tag{5}$$

ist, so hat man, woferne nur $n > \mu + 1$ ist,

$$\left|\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\right| = 1 - \frac{\mu+1}{n}. \tag{6}$$

Der Quotient (4) hat demnach bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth X. Es convergirt somit die binomische Reihe absolut, wenn $X < 1$ ist d. i. für alle Werthe von x zwischen -1 und $+1$. Sie divergirt unbedingt (S. 250), wenn der absolute Betrag von x grösser als 1 ist. Denn es ist dann nach S. 236

$$\lim_{n=+\infty} |\mu_n| X^n = \lim_{n=+\infty} |\mu_n x^n| = +\infty.$$

Die binomische Reihe lässt sich bei beliebigem μ summiren. Indem wir uns zunächst auf die Werthe von x zwischen -1 und $+1$ beschränken, setzen wir

$$\sum_0^\infty {}^n \mu_n x^n = \varphi(\mu, x).$$

Bedeuten μ und ν natürliche Zahlen, so hat man, wie bemerkt

$$\varphi(\mu, x) = (1+x)^\mu, \quad \varphi(\nu, x) = (1+x)^\nu.$$

Es ist demnach

$$\varphi(\mu, x) \cdot \varphi(\nu, x) = \varphi(\mu + \nu, x). \tag{7}$$

Diese Gleichung gilt, wie wir jetzt zeigen werden, allgemein, was immer auch für Werthe die reellen Zahlen μ ν haben mögen, wenn wir uns nur $|x|$ kleiner als 1 denken. Wir können die beiden ganzen Potenzreihen

$$\varphi(\mu, x) = 1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \cdots + \mu_n x^n + \cdots$$
$$\varphi(\nu, x) = 1 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \cdots + \nu_n x^n + \cdots,$$

weil sie absolut convergiren, nach dem 7. Satze auf S. 252 multipliciren, so dass ihr Product wieder als eine ganze Potenzreihe von x erscheint. Setzen wir

$$\varphi(\mu, x) \cdot \varphi(\nu, x) = 1 + \sum_1^\infty {}^n c_n x^n, \tag{8}$$

so ist

$$c_1 = \nu_1 + \mu_1 = \nu + \mu = \binom{\mu+\nu}{1}$$

$$c_2 = \nu_2 + \mu_1\nu_1 + \mu_2 = \frac{\nu(\nu-1)}{2} + \mu\nu + \frac{\mu(\mu-1)}{2} = \binom{\mu+\nu}{2},$$

allgemein

$$c_n = \nu_n + \mu_1\nu_{n-1} + \cdots + \mu_{n-1}\nu_1 + \mu_n.$$

Die rechte Seite ist gleich $\binom{\mu+\nu}{n}$, wie man leicht durch den Schluss von n auf $n+1$ beweisen kann. Lassen wir in der That die Formel

$$\sum_0^n {}^s \mu_s \nu_{n-s} = \binom{\mu+\nu}{n} \tag{9}$$

als richtig gelten, so finden wir

$$\binom{\mu+\nu}{n+1} = \binom{\mu+\nu}{n}\frac{\mu+\nu-n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_0^n {}^s \mu_s\nu_{n-s}\left[(\mu-s)+(\nu+s-n)\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_0^n {}^s \left[(s+1)\,\mu_{s+1}\nu_{n-s} + (n+1-s)\,\mu_s\nu_{n+1-s}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{1}{n+1}\sum_0^{n-1} {}^s (s+1)\,\mu_{s+1}\nu_{n-s} + \mu_{n+1}\nu_0 + \mu_0\nu_{n+1} \\ &\qquad + \frac{1}{n+1}\sum_1^n {}^s (n+1-s)\,\mu_s\nu_{n+1-s}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Führen wir in der ersten Summe anstatt s $s-1$ ein, so geht sie in $\Sigma s\mu_s\nu_{n+1-s}$ von $s=1$ bis $s=n$ über. Vereinigen wir nun die gleichstelligen Glieder der beiden Summen in (10), so erhalten wir, da $s+n+1-s=n+1$ ist,

$$\binom{\mu+\nu}{n+1} = \sum_0^{n+1} {}^s \mu_s\nu_{n+1-s}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Die Gleichung (9), welche als das Additionstheorem der Binomialcoefficienten bezeichnet werden kann, enthält als besondere Fälle die Formeln

$$\nu = -1 \qquad \sum_0^n {}^s (-1)^s \mu_s = (-1)^n \binom{\mu-1}{n} \tag{11}$$

$$\nu = +1 \qquad \binom{\mu}{n-1} + \binom{\mu}{n} = \binom{\mu+1}{n}.$$

Die letztere kann, wie schon auf S. 187 bemerkt ist, unmittelbar verificirt werden.

Zufolge der Beziehung (9) geht die rechte Seite der Formel (8) in

$$1 + \sum_{1}^{\infty}{}^{n} \binom{\mu + \nu}{n} x^n \quad \text{d. i.} \quad \varphi(\mu + \nu, x)$$

über; es besteht also das Additionstheorem (7) für beliebige reelle Werthe von μ und ν.

Betrachten wir x als eine dem Betrage nach unter 1 liegende Constante, μ aber als eine reelle Veränderliche, so erfüllt $\varphi(\mu, x)$ als Function von μ das Additionstheorem (7). Wir können daher auf sie den in VIII. 11 gezeigten Satz anwenden, wenn es uns gelingt, ein solches Intervall für μ anzugeben, dass die Function $\varphi(\mu, x)$ für alle zu ihr gehörigen Werthe von μ endlich ist. Ein derartiges Intervall ist z. B. (0, 1). Denken wir uns nämlich μ als positiven echten Bruch, so sind zufolge der Umformung der Gleichung (2):

$$\mu_n = (-1)^{n-1} \mu \left(1 - \frac{\mu + 1}{2}\right) \left(1 - \frac{\mu + 1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{\mu + 1}{n}\right) \tag{12}$$

alle μ_n absolut genommen positive echte Brüche. Wir haben also, wenn $0 \leqq \mu \leqq 1$ und, wie bemerkt, $X < 1$ ist,

$$|\varphi(\mu, x)| < 1 + X + X^2 + \cdots + X^n + \cdots = 1 : (1 - X)$$

d. h. es liegt $|\varphi(\mu, x)|$ unter der endlichen Zahl $1 : (1 - |x|)$.

Da $\varphi(1, x) = 1 + x$ ist, so ist mithin erwiesen, dass die Summe der binomischen Reihe (3) für jedes reelle x zwischen -1 und $+1$ und jedes reelle μ die Potenz $(1 + x)^\mu$ ist.

16. Die binomische Reihe für $x = -1$ und $x = +1$.

Aus der Formel (12) ersieht man, dass wenn n grösser als $\mu + 1$ geworden ist, die Binomialcoefficienten μ_n abwechselnd positiv und negativ sind. Je nachdem $\mu + 1$ positiv oder negativ d. i. μ grösser oder kleiner als -1 ist, nimmt der absolute Betrag von μ_n vom genannten Werthe von n an mit wachsendem n beständig ab oder zu. Aus dem Umstande, dass die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{n}$ divergent ist, ersehen wir nach Nr. 12, dass

$$\lim_{n = +\infty} |\mu_n| = 0 \text{ oder } +\infty, \text{ je nachdem } \mu > \text{ oder } < -1 \text{ ist.} \tag{13}$$

Daraus folgt schon, dass die binomische Reihe für $x = \pm 1$ divergirt, falls $\mu < -1$ ist. Dies gilt auch im Falle, dass $\mu = -1$ ist, weil $\binom{-1}{n} = (-1)^n$ ist.

Für $x = -1$ geht die binomische Reihe in die Reihe

$$\sum_{0}^{\infty}{}^{n} (-1)^n \mu_n \tag{14}$$

über, deren Glieder von einem bestimmten an sämmtlich das nämliche

Zeichen haben. Das Verhalten der Reihe (14) schliessen wir unmittelbar aus der Formel (11), welche die Summe ihrer $n+1$ Anfangsglieder giebt. Ist $\mu - 1 > -1$ d. i. μ positiv, so ist nach (13)

$$\lim_{n=+\infty} \binom{\mu-1}{n} = 0.$$

Die Reihe (14) convergirt demnach und zwar hat sie die Summe Null. Ist aber $\mu - 1 < -1$ d. i. μ negativ, so divergirt sie.

Für $x = +1$ sind die Glieder der binomischen Reihe von einem bestimmten an abwechselnd positiv und negativ. Ist $\mu > -1$, so nimmt ihr absoluter Betrag von einem bestimmten Werthe des Stellenzeigers an beim Wachsen desselben beständig ab und zwar hat er nach Formel (13) bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0. Es convergirt daher zufolge Nr. 9 die binomische Reihe und zwar absolut, wenn $\mu > 0$ ist, und relativ, wenn μ zwischen 0 und -1 liegt. Im ersteren Falle dürfen wir noch das Summationsverfahren der vorigen Nummer gelten lassen und können somit auf Grund desselben behaupten, dass die Summe der Reihe (3) 2^μ ist. Im zweiten Falle ist dies zwar auch richtig, kann aber nur mit Hilfe von Betrachtungen, die in diesem Werke nicht vorkommen, erwiesen werden.

Fassen wir das Gesagte zusammen, so erhalten wir die folgende Regel: „Für $x = -1$ werden die Glieder der binomischen Reihe schliesslich gleichbezeichnet, die Reihe convergirt dann und nur dann, wenn $\mu \geqq 0$ ist. Für $x = +1$ sind ihre Glieder von einem bestimmten an abwechselnd positiv und negativ. Die binomische Reihe convergirt jetzt dann und nur dann, wenn $\mu > -1$ ist, und zwar absolut nur, wenn $\mu \geqq 0$ ist. Der Grenzwerth derselben ist in jedem Falle, wo sie convergirt, $(1+x)^\mu$."

17. Entwickelung der m^{ten} Wurzel aus einem Binom in eine ganze Potenzreihe.

Bringt man die positive Zahl a auf die Form $\mathsf{A}^m + c$, wo A eine positive rationale Zahl bedeuten möge, so hat man

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{\mathsf{A}^m + c} = \mathsf{A}\sqrt[m]{1 + \frac{c}{\mathsf{A}^m}} = \mathsf{A}\left(1 + \frac{c}{\mathsf{A}^m}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Ist $|c| : \mathsf{A}^m \leqq 1$, so kann man diese Potenz nach dem binomischen Satze in Nr. 15 und 16 in eine Reihe entwickeln. Man findet hiernach

$$\begin{aligned}\sqrt[m]{\mathsf{A}^m + c} &= \mathsf{A}\left\{1 + \frac{c}{m\mathsf{A}^m} + \binom{1:m}{2}\frac{c^2}{\mathsf{A}^{2m}} + \cdots\right\} \\ &= \mathsf{A} + \frac{c}{m\mathsf{A}^{m-1}} - \frac{m-1}{2\mathsf{A}}\left(\frac{c^2}{m\mathsf{A}^{m-1}}\right)^2 + \cdots\end{aligned}$$

d. i. wenn wie in VIII. 7 $c : m\mathsf{A}^{m-1} = B$ gesetzt wird,

$$\sqrt[m]{\mathsf{A}^m + c} = \mathsf{A} + B - \frac{m-1}{2\mathsf{A}}B^2 + \cdots. \qquad (15)$$

Ist dabei c positiv, so sind die Glieder der Reihe (15) vom zweiten

an abwechselnd positiv und negativ. Dabei nehmen sie, wie sich aus den Bemerkungen über die Binomialcoefficienten am Eingange der vorigen Nummer unmittelbar ergiebt, dem Betrage nach mit wachsendem Zeiger beständig ab und convergiren gegen die Null als Grenzwerth. Mithin ist nach Nr. 8

$$A + B - \frac{m-1}{2\mathsf{A}} B^2 < \sqrt[m]{\mathsf{A}^m + c} < \mathsf{A} + B$$

oder

$$0 < \mathsf{A} + B - \sqrt[m]{\mathsf{A}^m + c} < \frac{m-1}{2\mathsf{A}} B^2. \tag{16}$$

Dies ist ein neuer Beweis der Formel (15*) auf S. 197, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass $c : \mathsf{A}^m \leqq 1$ d. i. $B \leqq \mathsf{A} : m$ ist.

Setzt man hier $\mathsf{A} = 1$ $c = d$, also $B = d : m$, so kommt man auf die Formel (l) auf S. 193

$$0 < 1 + \frac{d}{m} - \sqrt[m]{1 + d} < \frac{m-1}{2m^2} d^2 \tag{16*}$$

zurück, wobei man sich jedoch $0 < d \leqq 1$ zu denken hat. Dass die hier auftretende Differenz positiv ist, wurde schon in VIII. 6 allgemein gezeigt. Dass auch die zweite von diesen Beziehungen für $d > 1$ gilt, kann mit Hilfe einer andern binomischen Reihe leicht nachgewiesen werden (vgl. Uebung 16) auf S. 273).

Die Verwendung der Formel (16) zur Verbesserung der durch das gewöhnliche Wurzelausziehen gewonnenen Näherungswerthe wurde schon auf S. 197 f. berührt.

18. Die logarithmische Reihe.[1]

Setzen wir in der Formel (24) auf S. 220 $a = 1 + x$ und $1 : n = \mu$, so nimmt sie die Gestalt an

$$\lim_{\mu=0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = l(1+x). \tag{17}$$

Dabei braucht indess die Veränderliche μ nicht auf Stammbrüche beschränkt zu werden.[2]

---

1) Diese Ableitung der logarithmischen Reihe rührt von Euler (Introductio I. § 119) her.

2) Man kann nämlich die Formel (17) nach Cauchy (C. d'Analyse p. 170) auch aus der Exponentialreihe ableiten, wodurch die angegebene Beschränkung wegfällt. In der That ist nach der Gleichung (6) auf S. 258

$$(1+x)^\mu = e^{\mu l(1+x)} = 1 + \mu l(1+x) + \frac{\mu^2 [l(1+x)]^2}{2!} + \cdots,$$

somit

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = l(1+x) + \frac{\mu [l(1+x)]^2}{2!} + \cdots,$$

woraus durch den Grenzübergang $\lim \mu = 0$ nach dem Satze in Nr. 13 die Formel (17) i. T. sich ergiebt.

Lässt man das Argument x in der binomischen Reihe eine Zahl zwischen -1 und $+1$ sein und entwickelt die Binomialcoefficienten μ_n in ganze Functionen je n^{ten} Grades von μ, so kann man dieselbe nach dem Cauchy'schen Satze in Nr. 11 ohne Aenderung ihrer Summe in eine ganze Potenzreihe von μ verwandeln.[1])

Wir haben also in der Reihe (3) für $n = 1, 2 \cdots$

$$\mu_n = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{\mu}{n} + (-1)^{n-2}a_{n,2}\mu^2 + \cdots + (-1)^{n-r}a_{n,r}\mu^r + \cdots + \frac{\mu^n}{n!} \quad (18)$$

zu setzen, wobei die $a_{n,r}$ positive Zahlen sind. In der so erhaltenen Doppelreihe ersetzen wir alle Glieder durch ihre absoluten Beträge. Ist $|x| = X$ und $|\mu| = M$, so kommt jetzt neben X^n der Ausdruck

$$\frac{M}{n} + a_{n,2}M^2 + \cdots + a_{n,r}M^r + \cdots + \frac{M^n}{n!}$$

zu stehen, in welchem durch einen Blick auf die Formel (18) das Product

$$M(M+1)\cdots(M+(n-1)) : n!$$

erkannt wird. Dasselbe ist identisch mit $(-1)^n\binom{-M}{n}$. Es liefert also die Doppelreihe aus den genannten absoluten Beträgen die Horizontalsummen

$$1, \quad (-M)(-X), \quad \binom{-M}{2}X^2, \cdots, \binom{-M}{n}(-X)^n \cdots,$$

welche wieder eine binomische und zwar, da $X < 1$ ist, die convergente Reihe

$$1 + (-M)(-X) + \binom{-M}{2}(-X)^2 + \cdots + \binom{-M}{n}(-X)^n + \cdots$$

bilden. Die Bedingung des Cauchy'schen Doppelreihensatzes in Nr. 11 ist mithin erfüllt. Also dürfen wir die binomische Reihe (3) nach Verticalreihen summiren d. i. nach Potenzen von μ ordnen. Hierbei erhält μ den Coefficienten

$$\sum_1^\infty{}_n (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = X_1.$$

Bezeichnen wir den Coefficienten von μ^n allgemein mit X_n, so erhalten wir demnach die Umformung

$$(1+x)^\mu = 1 + X_1\mu + X_2\mu^2 + \cdots + X_n\mu^n + \cdots.$$

Daher ist, wenn μ nicht Null ist,

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = X_1 + X_2\mu + \cdots + X_n\mu^{n-1} + \cdots$$

---

1) Cauchy, C. d'Analyse p. 545.

und somit nach dem Satze in Nr. 13

$$\lim_{\mu=0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = X_1.$$

Stellt man diese Formel der Gleichung (17) gegenüber, so erkennt man, dass für jedes x zwischen -1 und $+1$

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots \tag{19}$$

ist.

Aus dem Satze auf S. 236 erkennt man sofort, dass die auf der rechten Seite von (19) befindliche Reihe für alle die genannten x absolut convergirt und für jene x, deren Betrag grösser als 1 ist, unbedingt divergirt. Für $x = +1$ divergirt sie, da sie in die harmonische Reihe (S. 235) übergeht. — Dass die Gleichung (19) auch für $x = 1$ gilt, dass also

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

ist, lässt sich mit den bisher vorgeführten Sätzen nicht mehr beweisen.

19. Vertauscht man in (19) x mit $-x$, so erhält man die Formel

$$-l(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \qquad (-1 \leqq x < +1)$$

und durch Addition dieser und der Formel (19)

$$l\,\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right\} \qquad (-1 < x < +1). \tag{20}$$

Bricht man diese Reihe beim k^{ten} Gliede ab und setzt $x = \pm X$ $(X > 0)$, so ist der Fehler $\pm R_k$, wobei

$$R_k = 2\left(\frac{X^{2k+1}}{2k+1} + \frac{X^{2k+3}}{2k+3} + \cdots\right).$$

Es ist demnach

$$R_k < \frac{2X^{2k+1}}{2k+1} + \frac{2X^{2k+3}}{2k+1} + \cdots = \frac{2X^{2k+1}}{2k+1} : (1 - X^2). \tag{21}$$

Wenn irgend eine positive Zahl N vorgelegt wird, so liefert die Gleichung

$$\frac{1+x}{1-x} = N \quad x = \frac{N-1}{N+1},$$

also für x einen Werth, der seinem absoluten Betrage nach unter der Einheit liegt. Somit kann lN durch die Reihe (20) erhalten werden, jedoch zur numerischen Berechnung ist sie in der Regel nicht geeignet. Auf diese Weise ist berechnet worden

$$l2 = 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \cdots\right\} = 0{,}69314718.$$

Setzt man

$$N = (a+h) : a,$$

unter a eine positive, unter h eine Zahl $> -a$ verstanden; so wird

$$x = h : (2a + h)$$

und man findet

$$l(a+h) - la = 2\left\{\frac{h}{2a+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2a+h}\right)^3 + \cdots\right\}. \qquad (22)$$

Der Unterschied der Logarithmen zweier Zahlen lässt sich in eine nach den ungeraden Potenzen des Quotienten: Unterschied der Zahlen dividirt durch ihre Summe, fortschreitende Reihe entwickeln. Für $a = 4$, $h = 1$ folgt aus (22)

$$l5 = 2l2 + 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\frac{1}{9^3} + \cdots\right\} = 1{,}60943791.$$

Man hat nun auch

$$l10 = l2 + l5 = 2{,}30258509$$

und damit den Modulus M des Briggischen Systemes

$$M = 1 : l10 = 0{,}4342944819 \cdots.$$

20. Nach Ermittelung des Modulus des Briggischen Systemes lassen sich die Reihen (20), (22) auch zur Berechnung der gemeinen Logarithmen verwenden. So findet man aus (22) durch Multiplication mit M (VIII. 12)

$$\log(a+h) = \log a + 2M\left\{\frac{h}{2a+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2a+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2h+a}\right)^5 + \cdots\right\}. \qquad (23)$$

Das erste Glied dieser Reihe reicht, wie Koralek bemerkt hat[1]), hin, um die Logarithmen aller Zahlen N von 10^6 bis 10^7 auf sieben Decimalen zu berechnen, wenn die Logarithmen von 2, 3, 7, 11, 13 bekannt sind. Dabei kann man freilich nur behaupten, dass der Fehler des auf diese Weise berechneten Logarithmus dem Betrage nach stets unter 10^{-7} (nicht unter $\frac{1}{2}10^{-7}$) liegt. Man erhält ihn nämlich, indem man die Glieder $\log a$ und $2Mh : (2a+h)$ auf je acht Decimalen mit der Correctur berechnet, ihre beiden Näherungswerthe α β addirt und deren Summe σ mit Rücksicht auf die Correctur auf sieben Decimalen verkürzt. Die verkürzte Summe sei σ', so dass $|\sigma - \sigma'| < \frac{1}{2}10^{-7}$ ist. Es genügt, h als positiv anzusehen. Bezeichnen wir die Summe aller auf das zweite folgenden Glieder der rechten Seite von (23) mit R_1, so haben wir nunmehr

$$\log(a+h) - \sigma' = \log(a+h) - \sigma + (\sigma - \sigma')$$
$$= (\log a - \alpha) + \left(\frac{2Mh}{2a+h} - \beta\right) + R_1 + (\sigma - \sigma'). \qquad (24)$$

Das erste und das zweite Glied dieser Summe sind dem Betrage

1) Vgl. Koralek, Méthode nouv. par calculer rap. les logarithmes etc. Paris 1851 oder A. Lorey, Das Neueste und Interessanteste aus der Logarithmotechnik. Weimar 1852.

nach kleiner als $\frac{1}{2}10^{-8}$. Für R_1 gewinnt man aus (21), $k=1$, $X=h:(2a+h)$ und $h=au$ setzend, die Ungleichung

$$R_1 < \frac{2M}{3}\left(\frac{u}{2+u}\right)^3 : \left\{1-\left(\frac{u}{2+u}\right)^2\right\} (=U_1).$$

Nehmen wir dann $|u|$ so klein an, dass

$$\frac{1}{10^8} + U_1 \leqq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^7} \quad \text{d. i.} \quad U_1 \leqq \frac{4}{10^8} \tag{25}$$

ist, so ergiebt sich aus (24), dass, wie behauptet wurde,

$$|\log(a+h) - \sigma'| < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^7} = \frac{1}{10^7}$$

ist. Die Ungleichung (25) d. i.

$$U_1 = \frac{2Mu^3}{3\cdot 4\,(2+u)\,(1+u)} \leqq \frac{4}{10^8}$$

ist sicher erfüllt, wenn wir u kleiner als $\frac{1}{126}$ annehmen. Die linke Seite ist nämlich, da $2M<1$, dann numerisch kleiner als

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{250^3} = \frac{2{,}13}{10^8}.$$

Die Einschränkung $|u| < 1:126$ erzielt Koralek auf folgende Art. Zunächst dividiren wir die gegebene Zahl N durch 10 000 und multipliciren den Quotienten ν mit einer solchen Zahl p, deren Logarithmus aus den gegebenen sich unmittelbar ergiebt, so dass

$$800 < p\nu < 1000.$$

Derartige Factoren sind:

p		von	bis	
$p = 9$	für die Zahl ν zwischen	100	und 111	
8	„ „ „ „ „	111	„ 125	
7	„ „ „ „ „	125	„ 142	
6	„ „ „ „ „	142	„ 166	
5	„ „ „ „ „	166	„ 200	($\log 5 = 1 - \log 2$)
4	„ „ „ „ „	200	„ 250	
$\frac{7}{2}$	„ „ „ „ „	250	„ 285	
3	„ „ „ „ „	285	„ 333	
$\frac{5}{2}$	„ „ „ „ „	333	„ 400	
2	„ „ „ „ „	400	„ 500	
$\frac{5}{3}$	„ „ „ „ „	500	„ 600	
$\frac{3}{2}$	„ „ „ „ „	600	„ 666	
$\frac{5}{4}$	„ „ „ „ „	666	„ 800.	

Somit ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Berechnung der Logarithmen der ganzen Zahlen zwischen 800 und 1000. 25 von diesen Zahlen enthalten nur die Primfactoren 2, 3, 5, 7, 11, 13; ihre Logarithmen sind somit bekannt. Diese Zahlen sind 800, 810, 819, 825, 832, 840, 845, 858, 864, 875, 880, 891, 896, 900, 910, 924, 936, 945, 960, 968, 972, 975, 980, 990, 1000. Bilden wir den Unterschied je zweier benachbarten und dividiren ihn durch die doppelte kleinere Zahl, so erhalten wir höchstens

$$\frac{960-945}{2\cdot 945} = \frac{1}{126}.$$

Das ist das Maximum von u.

Die Logarithmen der genannten 25 Zahlen sind auf acht Stellen mit Correctur zu berechnen. Ist $\nu < 800$, dagegen $p\nu$ zwischen 800 und 1000 gelegen, so dass $p\nu = a + h$ ist, wo a eine der soeben erwähnten Zahlen bedeutet, so hat man

$$\log \nu = -\log p + \log(a + h).$$

Es tritt somit zur rechten Seite von (23) noch das Glied $-\log p$.

Denken wir uns dasselbe auch bis auf 8 Decimalen berechnet, so gilt, wenn man beim 2. Gliede von (23) abbricht, noch immer die obige Fehlergrenze. Denn es erscheint in (25) bloss 3,5 anstatt des Zählers 4.

Die Logarithmen der Zahlen 2, 3, 7, 11, 13 müssen mit Hilfe der Reihe (23) auf mehr als 7 Stellen berechnet werden. Man hat

$$10 \log 2 = \log 1024 = \log 1000 + 2M\left\{\frac{24}{2024} + \frac{1}{3}\left(\frac{24}{2024}\right)^3 + \cdots\right\},$$

$$4 \log 3 = \log 81 \quad = \log 80 \quad + 2M\left\{\frac{1}{161} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{161}\right)^3 + \cdots\right\},$$

$$4 \log 7 = \log 2401 = \log 2400 + 2M\left\{\frac{1}{4801} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4801}\right)^3 + \cdots\right\},$$

$$2 = \log 100 = 2 \log 3 + \log 11 + 2M\left\{\frac{1}{199} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{199}\right)^3 + \cdots\right\},$$

$$\log 13 + \log 11 + \log 7 = \log 1001 = \log 1000$$
$$+ 2M\left\{\left(\frac{1}{2001}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2001}\right)^3 + \cdots\right\}.$$

Uebungen zum IX. Abschnitt.

1) Ausgangspunkt der Lehre von den absoluten reellen Zahlen nach Weierstrass. Lässt man die Zahlen $a_0, a_1 \cdots a_n \cdots$ in Nr. 1 positiv und rational sein und nimmt an, dass ihre Partialsummen $s_0\ s_1 \cdots s_n \cdots$ sämmtlich unter einer bestimmten (d. i. von n unabhängigen) Zahl A liegen, so ist s_n nach dem 7. Satze in VII. 5 eine convergente Function von n. Im Falle, dass s_n bei $\lim n = +\infty$ nicht einen rationalen Grenzwerth hat, wird der Zahlenreihe $a_0, a_1 \cdots$ ein neues Ding, die irrationale Zahl (a_n), zugeordnet. Von der convergenten Function s_n gelten die in der Uebung 1) auf S. 177 gemachten Bemerkungen. Demnach können wir zwei neue Dinge (a_n) (b_n), wobei auch die b_n sämmtlich positiv und rational sein sollen, in der a. a. O. angegebenen Weise vergleichen. Es sei also $(a_n) = (b_n)$, wenn die Einheit und jeder Stammbruch $1:q$ in beiden Zahlen gleich oft enthalten sind. Von dieser und den entsprechenden Erklärungen über die grössere und kleinere unter zwei ungleichen Zahlen ausgehend, entwickelt Weierstrass die Lehre von den absoluten reellen Zahlen. Als Summe $(a_n) + (b_n)$ erklärt er die zu den Gliedern $a_0 + b_0, a_1 + b_1 \cdots a_n + b_n \cdots$ gehörige Zahl $(a_n + b_n)$, als Product $(a_n) \cdot (b_n)$ die zu den Gliedern

$$a_m b_n \qquad \left(\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \cdots\right)$$

gehörige Zahl (vgl. Nr. 7).

Die relativen reellen Zahlen gewinnt Weierstrass durch Paarung der absoluten reellen Zahlen in ähnlicher Art, wie im III. 13 die relativen rationalen Zahlen aufgestellt wurden.

Weierstrass' Lehre von den reellen Zahlen in der ursprünglichen Gestalt gaben E. Kossak (Die Elemente der Arithmetik, 1872) und O. Biermann (Theorie der analytischen Functionen 1887, S. 19), in der späteren, streng logischen Form S. Pincherle (Battaglini Giornale T. XVIII, S. 185). Zur Vervollständigung der letzteren Darstellung dient die „Bemerkung zur Theorie der irrationalen Zahlen" von v. Dantscher (Ber. d. naturw.-mediz. Vereins Innsbruck Bd. XVII, 1888, S. 1).

2) Die Grenzwerthe der unendlichen Reihen

$$1 + 2a + 3a^2 + \cdots na^{n-1} + \cdots$$

$$1 + \binom{m+1}{m} a + \binom{m+2}{m} a^2 + \cdots + \binom{n}{m} a^{n-m} + \cdots \qquad (m = 2, 3 \cdots)$$

im Falle dass $|a| < 1$ ist, aus den zu Uebung 2) auf S. 221 gefundenen Summenformeln durch den Grenzübergang $\lim n = +\infty$ zu ermitteln.

3) Desgleichen den Grenzwerth der unendlichen Reihe

$$1 + (a+b) + (a^2 + ab + b^2) + \cdots + (a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n) + \cdots$$

für den Fall, dass a und b von einander verschieden und beide dem Betrage nach kleiner als 1 sind, aus der in Uebung 3) a. a. O. verlangten Summenformel. — Er ist $1 : (1-a)(1-b)$.

4) Unter welcher Bedingung lässt sich der Bruch $\frac{1}{a-x}$ in eine ganze Potenzreihe von $x - x'$ und unter welcher $\frac{1}{x-a}$ in eine solche von $\frac{1}{x-x'}$ entwickeln? (Besonderer Fall $x' = 0$.)

Anleitung. Man setze

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a-x'} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-x'}{a-x'}}, \qquad \frac{1}{x-a} = \frac{1}{x-x'} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a-x'}{x-x'}}$$

und entwickle jedes Mal den zweiten Bruch in eine geometrische Reihe.

Besonderer Fall. Der von S. 90 her bekannte Bruch $P : (e^h - 1)$, worin $P < e^h$ ist, liefert die Entwickelung:

$$\frac{P}{e^h - 1} = \frac{P}{e^h} + \frac{P}{e^{2h}} + \cdots + \frac{P}{e^{nh}} + \cdots.$$

5) Man weise die Convergenz der geometrischen Reihe unter der auf S. 228 angegebenen Bedingung mittels des allgemeinen Convergenzkriteriums in Nr. 2 nach.

6) Mit Hilfe der Ungleichung (5*) auf S. 231 lässt sich leicht zeigen, dass wenn die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$ convergirt, ihr allgemeines Glied a_n eine endliche Function von n ist d. i. dass es eine positive Zahl B giebt, unter welcher jedes ihrer Glieder seinem Betrage nach liegt.

7) Convergiren die unendlichen Reihen $a_0 + a_1 + \cdots$ und $b_0 + b_1 + \cdots$ und ist

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n \qquad (n = 0, 1, 2 \cdots),$$

(ohne dass jedoch hier stets das Zeichen $=$ steht), so convergirt auch die unendliche Reihe $c_0 + c_1 + \cdots$ und zwar hat man

$$\sum_0^\infty {}^n a_n < \sum_0^\infty {}^n c_n < \sum_0^\infty {}^n b_n.$$

Ist $a_n \leqq c_n$ $(n = 0, 1, 2 \cdots)$ und hat $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth $+\infty$, so auch $c_0 + c_1 + \cdots + c_n$. Ist $c_n \leqq b_n$ $(n = 0, 1, 2 \cdots)$ und hat $b_0 + b_1 + \cdots + b_n$ bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth $-\infty$, so auch $c_0 + c_1 + \cdots + c_n$.

8) Auf ähnliche Art, wie auf S. 235 die Divergenz der harmonischen Reihe bewiesen ist, lässt sich zeigen, dass die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1^{1+\alpha}} + \frac{1}{2^{1+\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\alpha}} + \cdots$$

convergirt oder divergirt, je nachdem α positiv oder negativ ist.

Ein zweiter Beweis dieses Satzes ergiebt sich mit Hilfe der Ungleichungen

$$\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} < \frac{\alpha}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha},$$

welche man aus der Formel (8) auf S. 202 ableiten kann. Sie führen auch zum Beweise der Dirichlet'schen Formel

$$\lim_{\alpha = +0} \alpha \sum_1^\infty {}^n \frac{1}{n^{1+\alpha}} = 1.$$

9) Giebt es positive Zahlen $\varkappa$, μ von der Art, dass unter k eine constante ganze Zahl verstanden, für jeden Werth von n grösser als μ $n a_{n+k} > \varkappa$ ist, so divergirt die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$, deren Glieder mindestens von einem bestimmten an sämmtlich positiv sind. Dies ist somit stets der Fall, wenn $n a_{n+k}$ bei $\lim n = +\infty$ einen positiven Grenzwerth hat. (Der Satz folgt unmittelbar aus dem Satze 1) auf S. 235.)

Z. B. es divergirt die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$a_n = \frac{\alpha}{\alpha n + \beta},$$

worin α β beliebige reelle Zahlen bedeuten, jedoch $\alpha \gtrless 0$ sein soll.

10) Beweis des folgenden Doppelsatzes. „Wenn die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ convergirt und die Zahlen $b_0, b_1 \cdots b_n \cdots$ bei wachsendem n dem endlichen Grenzwerthe b in einem Sinne sich nähern — oder wenn die Partialsumme

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

eine endliche Function von n ist (S. 170) und die Zahlen $b_0, b_1 \cdots b_n \cdots$ in der angegebenen Weise dem Grenzwerthe Null sich nähern, so convergirt die unendliche Reihe

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n + \cdots.\text{“}$$

(Abel, Oeuvres I. p. 222; Dirichlet, Zahlentheorie, 4. A. S. 376.)

Der Satz ergiebt sich mittelst des Verfahrens der partiellen Summirung d. i. der Umformung

$$\sum_0^n{}^r a_r b_r = s_0 b_0 + \sum_1^n{}^r (s_r - s_{r-1}) b_r = \sum_0^{n-1}{}^r s_r (b_r - b_{r+1}) + s_n b_n,$$

indem man darin n ins Unendliche wachsen lässt.

11) Durch Multiplication der beiden geometrischen Reihen

$$1 + a + a^2 + \cdots \quad (|a| < 1) \quad \text{und} \quad 1 + b + b^2 + \cdots \quad (|b| < 1)$$

gewinnt man ebenfalls die unter 3) erwähnte Formel.

12) Durch Multiplication der beiden Exponentialreihen (S. 258)

$$1 + x + \frac{x}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \cdots, \qquad 1 + y + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots$$

erhält man die Exponentialreihe

$$1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x+y)^p}{p!} + \cdots.$$

Auch hieraus folgt mittelst des Satzes in VIII. 11, dass die Summe der Exponentalreihe e^x ist, wobei e durch die Formel (9) S. 259 erklärt ist.

13) Die Formel (11) auf S. 262 für sich durch den Schluss von n auf $n+1$ zu beweisen.

14) Denkt man sich in der binomischen Reihe (S. 260) das Argument negativ, setzt also $x = -X$ $(X > 0)$, so sind die Glieder derselben, falls nur $n > \mu + 1$ ist, gleichbezeichnet. Man ermittele für den Rest $r_n = \sum_n^\infty{}^r \left|\binom{\mu}{r}\right| X^r$ eine obere Grenze.

a) Ist $\mu + 1 < 0$, so nimmt der Bruch $1 - \frac{\mu+1}{n}$ mit wachsendem n beständig ab. Daraus findet man leicht, dass

$$r_n < \left|\binom{\mu}{n}\right| X^n : \left\{1 - \left(1 - \frac{\mu+1}{n+1}\right) X\right\}. \tag{α}$$

b) Ist $\mu + 1 > 0$, so bleibt nichts übrig, als die Formel (c) auf S. 257 sinngemäss zur Anwendung zu bringen. Setzt man dort $m = n$, $R' = 1 - X$ (X kleiner als $1:2$ angenommen), $g = \left|\binom{\mu}{n}\right| R'^n$, so findet man

$$r_n < \left|\binom{\mu}{n}\right| X^n \frac{1-X}{1-2X}. \tag{β}$$

15) Man berechne mit Hilfe der binomischen Reihe auf zwanzig Decimalen unter Berücksichtigung der Correctur die Potenzen

$$\text{a) } \left(\frac{1}{2001}\right)^3 \qquad \text{b) } \left(\frac{1}{199}\right)^3$$

(vgl. S. 222). Zur letzteren Rechnung benöthigt man die Formel (α).

16) Man kann die Giltigkeit der Formel (16*) auf S. 265 für $d = 1$ und die Werthe von d grösser als 1 beweisen, indem man

$$\frac{1}{1+d} = 1 - \frac{d}{1+d}$$

setzt und bemerkt, dass $1:(1+d)^{1:m}$ kleiner ist als die Summe der drei ersten Glieder der binomischen Reihe für die Potenz

$$\left(1-\left(\frac{d}{1+d}\right)\right)^{\frac{1}{m}}.$$

17) Der Ausdruck (b) auf S. 225 liefert mit Hilfe der Reihenentwickelungen

$$d=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{1-10^{-7}}\right\}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{14}}+\cdots$$

$$-l\left(1-\frac{1}{10^7}\right)=\frac{1}{10^7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{14}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^{21}}+\cdots$$

$$\log\text{ nep } b=10^7 l\left(\frac{10^7}{b}\right)\left\{1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10^{14}}+\cdots\right\}.$$

18) Die Antilogarithmen von Bürgi beziehen sich auf die Basis 1,0001. Man berechne den zugehörigen Modulus, allgemein den zur Basis $1+\frac{1}{m}$ gehörigen.

19) In einer Tafel, welche die gemeinen Logarithmen aller Zahlen von 10^m bis $10^{m+1}-1$ giebt, beginnt die Mantisse des zweiten Logarithmus d. i. des von 10^m+1 mit den nämlichen geltenden Ziffern, wie der Modulus des Briggs'schen Systems. Woher kommt das?

20) „Hat die Function a_n von n die Eigenschaft, dass sich der Quotient a_{n+k+1}/a_{n+k}, worin k irgend eine feste ganze Zahl bedeutet, auf die Form bringen lässt:

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}=1+\frac{\mu}{n}+\frac{\omega(n)}{n^{1+\alpha}} \qquad (\alpha>0), \tag{a}$$

unter μ, α constante Zahlen und zwar unter der letzteren eine positive und unter $\omega(n)$ eine Function von n, welche bei $\lim n=+\infty$ einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerth besitzt, verstanden; so hat a_n von einem bestimmten Werthe des Stellenzeigers n an Werthe des nämlichen Vorzeichens und bei $\lim n=+\infty$ einen Grenzwerth, der, je nachdem μ positiv, Null oder negativ ist, unendlich, endlich und von 0 verschieden oder Null ist."

Der Satz folgt sofort aus dem in Nr. 12 und dem in Uebung 8).

21) „Unter den nämlichen Voraussetzungen über a_n convergirt die unendliche Reihe

$$a_0+a_1+a_2+\cdots \tag{b}$$

dann und nur dann, wenn $\mu<-1$ ist."

Setzt man

$$1+\frac{\mu}{n}+\frac{\omega(n)}{n^{1+\alpha}}=\left(1+\frac{\mu}{n}\right)(1+X_n),$$

so ist

$$X_n=\frac{\omega(n)}{n^{1+\alpha}}:\left(1+\frac{\mu}{n}\right),$$

wobei $\omega(n)$ von einem bestimmten Werthe $n = m$ an stets dasselbe Zeichen hat. Da die Reihe $\Sigma n^{-1-\alpha}$ convergirt, so nach dem Satze 3) S. 237 auch die Reihe ΣX_n. Nun ist nach (a)

$$a_{n+k} = a_{m+k} \prod_m^{n-1} {}_r \left(1 + \frac{\mu}{r}\right) \prod_m^{n-1} {}_r (1 + X_n).$$

Zufolge des soeben erwähnten Satzes verhält sich die unendliche Reihe Σa_n gerade so, wie die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\prod_m^{n-1} {}_r \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)$ d. i. wie die binomische zum Exponenten $-\mu - 1$ für $x = -1$, weil nach dem Satze in Nr. 12 $\prod_m^{n-1} {}_r (1 + X_n)$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerth hat.

NB. Für $\mu = -1$ geht die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\prod_m^{n-1} {}_r \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)$ in die harmonische (S. 235) über. Ist μ eine natürliche Zahl, so ist die ebengenannte Reihe für sich zu betrachten. Ihre Divergenz ergiebt sich unmittelbar aus dem Satze 2) in Nr. 12.

22) Man zeige mit Hilfe der binomischen Reihe und des Satzes in 20), dass falls $0 < \mu < 1$ und $0 < x \leqq 1$ ist,

$$0 < (1 + x)^\mu - \left[1 + \frac{\mu x}{1 + \frac{1-\mu}{2} x}\right] < \frac{\mu (1 - \mu^2)}{12} x^3 : \left(1 + \frac{1-\mu}{2} x\right). \quad \text{(c)}$$

Die Formel gilt auch für $x > 1$, wie sich mit Hilfe des Mittelwerthsatzes der Differentialrechnung darthun lässt.

23) Setzt man in (c)

$$\mu = 1 : m \qquad x = (a - A^m) : A^m,$$

hierauf der Kürze wegen

$$a - A^m = c \qquad c : m A^{m-1} = B$$

und multiplicirt mit A, so erhält man die Ungleichungen

$$0 < \sqrt[m]{a} - \left[A + \frac{c}{m A^{m-1} + \frac{m-1}{2} \frac{c}{A}}\right] < \frac{m^2 - 1}{12} \cdot \frac{B^3}{A^2}. \quad \text{(d)}$$

Der Zusatz

$$c : \left(m A^{m-1} + \frac{m-1}{2} \frac{c}{A}\right) = L$$

zum r-ziffrigen Näherungswerthe A der m^{ten} Wurzel aus der gegebenen Zahl a (S. 194) heisst die Lambert'sche[1]) Ergänzung desselben. Setzt man wie auf S. 197 $k - r - s + 1 = l$,

---

1) Lambert, Beiträge II. S. 152.

$$\sqrt[m]{a} = A + v10^l + x' \qquad B = h10^l + R',$$

ferner

$$L = h'10^l + R'' \qquad (0 \leqq R'' < 10^l),$$

so erhält man aus (d) zur Vergleichung der ganzen Zahlen v und h' die Beziehungen

$$-1 < v - h' < \frac{m^2-1}{12\,c_0^2} \cdot \frac{(h+1)^3}{10^{2(r+s-1)}} + 1 \tag{e}$$

und zwar auf ähnliche Weise wie die Ungleichungen (19) a. a. O.

Gewöhnlich darf man, wie dort bemerkt ist, $h + 1 \leqq 10^s$ annehmen. Ist ferner

$$\frac{m^2-1}{12\,c_0^2} < 10^i,$$

so ergiebt sich aus (e), dass

$$0 \leqq v - h' < \frac{1}{10^{2r-s-i-2}} + 1.$$

Setzt man $s = 2r - i - 2$, so ist demnach

$$0 \leqq v - h' \leqq 1$$

d. i. v ist entweder gleich h' oder $h' + 1$.

24) „Man stelle die absolute Convergenz der Reihe

$$1 + x \cdot \frac{a}{x} + \binom{x}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \cdots + \binom{x}{n}\left(\frac{a}{x}\right)^n + \cdots \tag{α}$$

fest und zeige, dass für die dem Convergenzintervalle angehörigen x ihre Summe

$$e^{x\,l\left(1+\frac{a}{x}\right)} = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

ist." (Hierzu entwickelt man die Binomialcoefficienten $\binom{x}{n}$ nach steigenden Potenzen von x und weist nach, dass die auf diese Art erhaltene Doppelreihe (α) nach Vertikalreihen summirt werden darf.)

25) „Es ist zu zeigen, dass der Ausdruck

$$1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - ln$$

bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth hat." Zu diesem Behufe bringt man ihn in die Form

$$1 - l2 + [\tfrac{1}{2} - l(1+\tfrac{1}{2})] + [\tfrac{1}{3} - l(1+\tfrac{1}{3})] + \cdots + \left[\frac{1}{n-1} - l\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\right]$$

und entwickelt die Logarithmen nach Formel (19) S. 267. Der genannte Grenzwerth ist die Euler'sche Constante $0{,}5772156649\cdots$.

X. Abschnitt.

Analytische Theorie der complexen Zahlen.

1. Die Hamilton'schen Zahlenpaare.

Da die Gleichung $x^2 = -1$ keine reelle Wurzel hat, so sucht man ihr durch Erweiterung des Systemes der reellen Zahlen Auflösungen zu verschaffen. In der allgemeinen Arithmetik ist dabei so vorzugehen, dass sämmtliche Regeln über das Rechnen mit den reellen Zahlen auch für die neuen Zahlen Giltigkeit erhalten. Es ist, wie sich sofort zeigen wird, in der That möglich, diese Forderung zu erfüllen und zwar nur auf eine Weise.

Um die zur Aufstellung der neuen Zahlen erforderlichen Erklärungen und Annahmen auf die geringste Anzahl einzuschränken, bedienen wir uns hierbei des schon von III. 7 her bekannten Hamilton'schen Verfahrens der Zahlenpaarung.[1])

1. Def. „Der Zusammenstellung von je zwei reellen Zahlen α_1, α_2 in einer bestimmten Anordnung wird ein neues Ding, das Paar (α_1, α_2) zugeordnet.“ Das Paar $(0, 0)$ wird mit 0 bezeichnet.

Die Paare werden zu Grössen gemacht durch die Erklärung:

2. Def. Zwei Paare (α_1, α_2) (β_1, β_2) sind dann und nur dann einander gleich, wenn $\alpha_1 = \beta_1$ und $\alpha_2 = \beta_2$ ist. Insbesondere ist dann und nur dann $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, wenn $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ ist.

Den Forderungen in I. 2 wird durch diese Erklärung offenbar Genüge geleistet.

Welches von je zwei ungleichen Paaren als das grössere bezeichnet werden kann, werden wir in Nr. 4 angeben.

2. Complexe Zahlen mit zwei Einheiten. Ihre Addition und Subtraction.[2])

3. Def. Als Summe zweier Paare (α_1, α_2) (β_1, β_2) betrachten wir das Paar $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$. D. i.

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2). \tag{1}$$

1) Vgl. W. R. Hamilton, Dublin Transact. 17 (1837) S. 393, Lectures on Quaternions (1853), Vorrede.

2) Die Entwickelungen von Nr. 2, 3, 5—7 verdankt man Weierstrass (vgl. Pincherle Saggio etc. in Battaglini G. XVIII. p. 203—210).

Der Name „Summe" für die soeben erklärte Verknüpfung je zweier Paare wird gerechtfertigt durch das Bestehen der Sätze:

1) Neben $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1', \alpha_2') \quad (\beta_1, \beta_2) = (\beta_1', \beta_2')$ ist

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1', \alpha_2') + (\beta_1', \beta_2').$$

2) $\{(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2)\} + (\gamma_1, \gamma_2) = (\alpha_1, \alpha_2) + \{(\beta_1, \beta_2) + (\gamma_1, \gamma_2)\}.$

3) $(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (\beta_1, \beta_2) + (\alpha_1, \alpha_2).$

Dieselben ergeben sich unmittelbar aus der 2. und 3. Erklärung.

4. Def. Einführung des Coefficienten. Bedeutet ϱ eine reelle Zahl, so verstehen wir unter $\varrho(\alpha_1, \alpha_2)$ oder $(\alpha_1, \alpha_2)\varrho$ {liess „ϱ an (α_1, α_2)"} das Paar $(\varrho\alpha_1, \varrho\alpha_2)$.

Bezeichnen wir die Paare $(1, 0)$ und $(0, 1)$ bezw. mit e_1 und e_2, so haben wir demnach

$$(\alpha_1, 0) = \alpha_1 e_1 \qquad (0, \alpha_2) = \alpha_2 e_2.$$

Nach der Formel (1) ist ferner

$$(\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2);$$

somit erhalten wir die neue Darstellung

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2.$$

Zufolge derselben soll von nun an das Paar (α_1, α_2) die complexe Zahl mit den Coordinaten (der ersten und der zweiten) α_1, α_2; e_1 e_2 ihre Einheiten heissen.[1])

Die Erklärungen 2)—4) lauten nunmehr so:

2) „Es ist

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

dann und nur dann, wenn $\alpha_1 = \beta_1 \quad \alpha_2 = \beta_2$ ist. Insbesondere ist

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$$

dann und nur dann, wenn $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ ist."

3) Es ist

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2. \tag{2}$$

4) Es ist

$$\varrho(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)\varrho = (\varrho\alpha_1)e_1 + (\varrho\alpha_2)e_2. \tag{3}$$

Aus der letzten ergeben sich unmittelbar die nachstehenden Sätze, worin ϱ, σ reelle, a, b complexe Zahlen bedeuten.

---

1) Im Folgenden werden in der Regel die griechischen Buchstaben reelle, die lateinischen (neben natürlichen Zahlen, insbesondere als Indices) complexe Zahlen bedeuten.

Unter complexer Zahl verstand man früher eine mehrfachbenannte Zahl (vgl. Bézout, Cours de Math. 1767 I. S. 105, Klügel, Math. Wörterbuch II. S. 734). Gauss (Werke II. S. 102) bezeichnete damit die Summe einer reellen Zahl und der Quadratwurzel aus einer negativen Zahl (vgl. Nr. 9).

1) „Ist a eine von Null verschiedene complexe Zahl und dabei $\varrho a = 0$, so muss $\varrho = 0$ sein.“ [Denn denkt man sich $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, so hat man $\varrho \alpha_1 = 0$ $\varrho \alpha_2 = 0$, demnach, weil nicht beide Coordinaten α_1, α_2 verschwinden sollen, $\varrho = 0$.]

2) $\varrho(\sigma a) = (\varrho\sigma) a$ 3) $(\varrho + \sigma) a = \varrho a + \sigma a$ 4) $\varrho(a + b) = \varrho a + \varrho b$.

Die Formeln 3) und 4) lassen sich auf mehrgliedrige Summen ausdehnen d. h. es ist

$$(\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m) a = \varrho_1 a + \varrho_2 a + \cdots + \varrho_m a$$
$$\varrho(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) = \varrho a_1 + \varrho a_2 + \cdots + \varrho a_m.$$

Die Subtraction der complexen Zahlen ist stets möglich und eindeutig. Der Gleichung

$$b + x = a,$$

worin $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ sei, genügt nämlich die Zahl $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ dann und nur dann, wenn

$$\beta_1 + \xi_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 + \xi_2 = \alpha_2,$$

also

$$\xi_1 = \alpha_1 - \beta_1, \quad \xi_2 = \alpha_2 - \beta_2$$

ist. — Die Zahl

$$0 - a = (-\alpha_1) e_1 + (-\alpha_2) e_2$$

wird mit $-a$ d. i. $-(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)$ bezeichnet und heisst „a entgegengesetzt“ oder „Gegenzahl zu a“. Man hat ferner

$$-a = -(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = (-\alpha_1 e_1) + (-\alpha_2 e_2),$$

wofür $-\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2$ geschrieben werden kann.

3. Einführung neuer Einheiten. — Zwischen den Einheiten e_1 e_2 besteht keine lineare Gleichung; denn jede solche kann auf die Form $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 = 0$ gebracht werden, woraus sich lediglich $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ergiebt. Dieser Satz gestattet in gewissem Sinne eine Umkehrung. Die Einheiten e_1 e_2 lassen sich durch jedes Paar von Zahlen

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \qquad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \tag{4}$$

ersetzen, zwischen denen keine Gleichung von der Form

$$\alpha a + \beta b = 0$$

besteht, oder was dasselbe besagt, deren Determinante

$$\delta = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2$$

von Null verschieden ist. Unter dieser Voraussetzung findet man nämlich aus den Gleichungen (4)

$$\left(\frac{\beta_2}{\delta}\right) a - \left(\frac{\alpha_2}{\delta}\right) b = e_1, \qquad \left(\frac{\alpha_1}{\delta}\right) b - \left(\frac{\beta_1}{\delta}\right) a = e_2,$$

sodass man jeder Zahl $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ die Gestalt $\xi a + \eta b$ ertheilen kann.

4. Die grössere von zwei ungleichen complexen Zahlen.[1])

Erklärung: „$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ heisst grösser (kleiner) als $\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$, wenn α_1 grösser (kleiner) als β_1 und falls $\alpha_1 = \beta_1$, wenn α_2 grösser (kleiner) als β_2 ist.“ — Eine complexe Zahl, welche grösser (kleiner) als Null ist, heisst positiv (negativ).

Dass sie den in I. 5 verzeichneten Forderungen genügt, springt in die Augen. In der That hat man, wenn

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 > \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2, \quad \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 > \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$$

ist, entweder $\alpha_1 > \beta_1$ $\beta_1 \geqq \gamma_1$, also $\alpha_1 > \gamma_1$ oder $\alpha_1 = \beta_1$ $\beta_1 > \gamma_1$, also wieder $\alpha_1 > \gamma_1$ oder endlich neben $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$ $\alpha_2 > \beta_2$ $\beta_2 > \gamma_2$, also $\alpha_2 > \gamma_2$, sodass in jedem Falle sich ergiebt

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 > \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2.$$

Aus der vorstehenden Erklärung folgen die beiden Sätze:

1) Neben $a > a'$ ist $a + b > a' + b$. — Der Satz folgt daraus, dass wenn $a' = \alpha_1' e_1 + \alpha_2' e_2$ ist, neben $\alpha_1 > \alpha_1'$ $\alpha_1 + \beta_1 > \alpha_1' + \beta_1$ und neben $\alpha_1 = \alpha_1'$, $\alpha_2 > \alpha_2'$

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1' + \beta_1, \quad \alpha_2 + \beta_2 > \alpha_2' + \beta_2$$

sein muss. — Besonderer Fall des Satzes: „Neben $a > 0$ ist $a + b > b$.“

2) „Ist ϱ eine positive reelle Zahl und $a > b$, so ist $\varrho a > \varrho b$.“ Ist nämlich $a > b$, so ist entweder $\alpha_1 > \beta_1$ oder $\alpha_1 = \beta_1$ $\alpha_2 > \beta_2$, also bezw. $\varrho \alpha_1 > \varrho \beta_1$ oder $\varrho \alpha_1 = \varrho \beta_1$ $\varrho \alpha_2 > \varrho \beta_2$, somit ist stets $\varrho a > \varrho b$.

Die positiven complexen Zahlen $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$, für sich betrachtet, bilden ein System von absoluten Grössen im weiteren Sinne (V. 1). Sie erfüllen in der That die in V. 2 aufgeführten Forderungen 1)—14); der 15., dem Axiom des Archimedes, genügen sie aber nicht immer. Zufolge der obigen Erklärung ist die Zahl $\beta_2 e_2$, wofür $\beta_2 > 0$ sein soll, kleiner als jede Zahl $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, deren erste Coordinate α_1 positiv ist. Gleichwohl ist das n-fache der ersteren Zahl d. i. die Zahl $(n\beta_2) e_2$ kleiner als die Zahl $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, wie gross die natürliche Zahl n auch sein mag.

Wir hätten auch festsetzen können, es sei $a > b$, entweder wenn $\alpha_2 > \beta_2$ oder wenn neben $\alpha_2 = \beta_2$ $\alpha_1 > \beta_1$ ist. Dann würde die Beziehung zweier ungleichen complexen Zahlen manchmal anders lauten, als auf Grund der früheren Erklärung. Man bemerkt, dass die Beziehung zweier solchen Zahlen sich überhaupt bei Einführung zweier neuer Einheiten ändern kann.

5. Multiplication der complexen Zahlen mit zwei Einheiten.

Da das Product d. i. die Zeichengruppe $a \cdot b$ eine Zahl des bisher betrachteten Systemes werden soll, so setzen wir zunächst fest, dass die Einheitsproducte $e_1 \cdot e_1 \quad e_1 \cdot e_2 \quad e_2 \cdot e_1 \quad e_2 \cdot e_2$

---

1) Nach J. Thomae s. S. 294 Note 2).

Zahlen desselben sind. Und zwar sei

$$\begin{array}{ll} e_1 \cdot e_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 & e_2 \cdot e_2 = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 \\ e_1 \cdot e_2 = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 & e_2 \cdot e_1 = \mu_1' e_1 + \mu_2' e_2. \end{array} \tag{1}$$

Mittelst der Einheitsproducte erklären wir dann die nachstehenden Producte

$$\begin{aligned} (\alpha_1 e_1) \cdot (\beta_1 e_1) &= (\alpha_1 \beta_1)(e_1 \cdot e_1) \\ (\alpha_1 e_1) \cdot (\beta_2 e_2) &= (\alpha_1 \beta_2)(e_1 \cdot e_2) \\ (\alpha_2 e_2) \cdot (\beta_1 e_1) &= (\alpha_2 \beta_1)(e_2 \cdot e_1) \\ (\alpha_2 e_2) \cdot (\beta_2 e_2) &= (\alpha_2 \beta_2)(e_2 \cdot e_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Das Hauptgesetz der Multiplication ist das distributive. Wir brauchen es indess nicht in seiner Gänze vorauszusetzen, vielmehr genügt die folgende, auf demselben beruhende Erklärung des Productes. Es sei (Def. 5)

$$\begin{aligned} a \cdot b = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \cdot (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) &= (\alpha_1 e_1) \cdot (\beta_1 e_1) + (\alpha_1 e_1) \cdot (\beta_2 e_2) \\ + (\alpha_2 e_2) \cdot (\beta_1 e_1) + (\alpha_2 e_2) \cdot (\beta_2 e_2) &= (\alpha_1 \beta_1)(e_1 \cdot e_1) + (\alpha_1 \beta_2)(e_1 \cdot e_2) \\ + (\alpha_2 \beta_1)(e_2 \cdot e_1) + (\alpha_2 \beta_2)(e_2 \cdot e_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Damit haben wir erreicht, dass das Product von je zwei Zahlen des neuen Systemes auch eine Zahl desselben ist.

Aus (2) und (3) folgt zunächst die Regel

$$(\varrho a) \cdot (\sigma b) = (\varrho \sigma)(a \cdot b),$$

worin ϱ σ reelle Zahlen bedeuten; ferner die beiden Formeln des distributiven Gesetzes

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

unter a b c beliebige Zahlen des neuen Systemes verstanden (vgl. Nr. 13).

Soll auch das associative Gesetz bei dieser Multiplication allgemein gelten, so muss die Formel

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

bestehen. Die Einheitsproducte $e_r \cdot e_s$ sind demnach so zu wählen, dass für die Einheiten die soeben erwähnte Relation erfüllt ist, was, wie leicht ersichtlich ist (vgl. Nr. 15), auch hinreichend ist. Es sollen also die acht Gleichungen

$$\begin{array}{ll} (e_1 \cdot e_1) \cdot e_1 = e_1 \cdot (e_1 \cdot e_1) & (e_1 \cdot e_1) \cdot e_2 = e_1 \cdot (e_1 \cdot e_2) \\ (e_1 \cdot e_2) \cdot e_1 = e_1 \cdot (e_2 \cdot e_1) & (e_1 \cdot e_2) \cdot e_2 = e_1 \cdot (e_2 \cdot e_2) \\ (e_2 \cdot e_1) \cdot e_1 = e_2 \cdot (e_1 \cdot e_1) & (e_2 \cdot e_1) \cdot e_2 = e_2 \cdot (e_1 \cdot e_2) \\ (e_2 \cdot e_2) \cdot e_1 = e_2 \cdot (e_2 \cdot e_1) & (e_2 \cdot e_2) \cdot e_2 = e_2 \cdot (e_2 \cdot e_2) \end{array} \tag{4}$$

bestehen. Die erste geht nach Untersetzung des Werthes von $e_1 \cdot e_1$ aus (1) über in

$$(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) \cdot e_1 = e_1 \cdot (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)$$

d. i.

$$\lambda_1 (e_1 \cdot e_1) + \lambda_2 (e_2 \cdot e_1) = \lambda_1 (e_1 \cdot e_1) + \lambda_2 (e_1 \cdot e_2),$$

woraus folgt

$$\lambda_2(e_2 \cdot e_1 - e_1 \cdot e_2) = 0.$$

Auf ähnliche Weise liefert die letzte der Formeln (4) die Gleichung

$$\nu_1(e_2 \cdot e_1 - e_1 \cdot e_2) = 0.$$

Die genannten zwei unter den Formeln (4) verlangen somit entweder die Annahme $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1$ oder, falls diese Producte ungleich sind, nach Satz 1) S. 279 die Annahme $\lambda_2 = \nu_1 = 0$. Wir wollen zunächst die erste verfolgen.

Annahme 6. Es sei also

$$e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1. \tag{5}$$

Dann ist, wie ein Blick auf die Formel (3) zeigt, allgemein $a \cdot b = b \cdot a$.

Es ist leicht zu sehen, dass sich unter Voraussetzung der Formel (5) die Gleichungen (4) auf folgende zwei

$$(e_1 \cdot e_1) \cdot e_2 = e_1 \cdot (e_1 \cdot e_2) \qquad (e_2 \cdot e_2) \cdot e_1 = e_2 \cdot (e_2 \cdot e_1) \tag{6}$$

zurückführen lassen. Wir wollen jedoch hier auf ihre Auswerthung nicht eingehen (vgl. indess S. 318), weil uns die Annahme, die wir zunächst machen wollen, derselben enthebt.

6. I. Hauptfall. a) Zahlensysteme mit zwei Einheiten, welche eine distributive, associative, commutative Multiplication mit einer indifferenten Zahl (Modulus) zulassen.

Annahme 7. Es sei eine indifferente Zahl $e = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2$ vorhanden d. h. eine solche Zahl, dass was immer x auch für eine Zahl des Systemes sein mag, stets $e \cdot x = x \cdot e = x$ ist.

Corollar. „Es giebt nur eine indifferente Zahl." — Denn gäbe es neben e noch eine zweite e', so müsste nach dem soeben Bemerkten $e \cdot e' = e' \cdot e = e'$ sein; andererseits müsste auch $e' \cdot x = x \cdot e' = x$, folglich $e' \cdot e = e \cdot e' = e$ sein, was neben den ersteren Gleichungen nicht möglich ist.

Da ε_1, ε_2 nicht zugleich 0 sein können, so dürfen wir die Zahl e als die eine Einheit wählen. Bezeichnen wir die andere mit g, so nehmen die Einheitsproducte die folgende Form an

$$e \cdot e = e \qquad e \cdot g = g \cdot e = g \qquad g \cdot g = \mu e + \nu g. \tag{7}$$

Daraus erhellt unmittelbar das Bestehen der Gleichungen (6), welche nunmehr so lauten

$$(e \cdot e) \cdot g = e \cdot (e \cdot g) \qquad (g \cdot g) e = g \cdot (g \cdot e).$$

Denn beide Seiten der ersteren Gleichung liefern g, beide Seiten der letzteren $g \cdot g$. Demnach ist die Multiplication bei beliebigen Werthen von μ, ν associativ. Daraus können wir nach dem 2. Satze in III. 2 schliessen, dass für unsere Multiplication auch das commutative Gesetz allgemeine Giltigkeit besitzt. Aus den Gleichungen (7) ergiebt

sich wieder, dass es nur die eine indifferente Zahl e für unsere Multiplication giebt. Soll nämlich bei willkürlichen ξ η

$$(\alpha e + \beta g)(\xi e + \eta g) = \xi e + \eta g$$

d. i.

$$(\alpha\xi)e + (\alpha\eta + \beta\xi)g + (\beta\eta)(\mu e + \nu g) = \xi e + \eta g$$

sein, so muss

$$\alpha\xi + \beta\mu\eta = \xi \qquad \alpha\eta + \beta\xi + \beta\nu\eta = \eta,$$

also $\alpha = 1$ $\beta = 0$ sein.

Das Quadrat der zunächst beliebigen Zahl

$$a = \alpha e + \beta g,$$

wo nur β nicht 0 sein soll, ist

$$a \cdot a = (\alpha^2 + \mu\beta^2)e + [\beta(2\alpha + \beta\nu)]g.$$

Nehmen wir

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}\beta\nu,$$

so reducirt sich $a \cdot a$ auf die Einheit e:

$$a \cdot a = \beta^2\left(\frac{\nu^2}{4} + \mu\right)e. \tag{8}$$

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn $\frac{\nu^2}{4} + \mu < 0$ ist, so kann man β in (8) so annehmen, dass

$$\beta^2\left(\frac{\nu^2}{4} + \mu\right) = -1$$

ist. Führt man eine der Zahlen

$$i = \frac{\pm(\frac{1}{2}\nu e - g)}{\sqrt{-\frac{1}{4}\nu^2 - \mu}}$$

als zweite Einheit ein, so gelangt man zu den Einheitsproducten

$$e \cdot e = e \qquad e \cdot i = i \cdot e = i \qquad i \cdot i = -e \tag{I}$$

und damit zur Formel

$$(\alpha e + \beta i) \cdot (\alpha' e + \beta' i) = (\alpha\alpha' - \beta\beta')e + (\alpha\beta' + \beta\alpha')i. \tag{9}$$

Daraus ergeben sich sofort die folgenden Sätze.

a) Wenn der Divisor nicht Null ist, so lässt sich die Division stets ausführen und zwar in einer einzigen Weise. Wenn nämlich zu den Zahlen

$$\alpha e + \beta i, \qquad \gamma e + \delta i$$

eine dritte $\xi e + \eta i$ zu suchen ist, so beschaffen dass

$$(\gamma e + \delta i) \cdot (\xi e + \eta i) = \alpha e + \beta i$$

ist, so müssen ξ η nach (9) den Gleichungen

$$\gamma\xi - \delta\eta = \alpha \qquad \delta\xi + \gamma\eta = \beta \tag{10}$$

genügen. Man hat also

$$(\gamma^2 + \delta^2)\xi = \alpha\gamma + \beta\delta \qquad (\gamma^2 + \delta^2)\eta = \beta\gamma - \alpha\delta, \tag{10*}$$

woraus ersichtlich ist, dass falls $\gamma e + \delta i$ nicht Null, also $\gamma^2 + \delta^2 > 0$ ist, ξ η bestimmte Werthe besitzen. Man hat demnach

$$\frac{\alpha e + \beta i}{\gamma e + \delta i} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} e + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i.$$

Die Division durch Null ist nicht zulässig, denn entweder ist sie unmöglich, dann nämlich, wenn der Dividend nicht Null ist, oder sie liefert kein bestimmtes Ergebniss dann wenn er ebenfalls Null ist. Ist $\gamma = 0$ $\delta = 0$, so gehen die Gleichungen (10) über in $0 = \alpha$ $0 = \beta$, wovon mindestens eine einen Widerspruch enthält, falls α und β nicht beide verschwinden. Sind aber auch α und β gleich 0, so können ξ, η in den Gleichungen (10) beliebige Werthe annehmen.

b) Wenn das Product zweier Zahlen Null ist, so muss eine davon Null sein. Denn ist in den Gleichungen (10) $\alpha = \beta = 0$ und wird $\gamma e + \delta i$ von Null verschieden vorausgesetzt, so folgt aus (10*)

$$\xi = 0 \quad \eta = 0 \quad \text{d. i.} \quad \xi e + \eta i = 0.$$

2) Wenn $\frac{\nu^2}{4} + \mu > 0$ ist, so kann man β so annehmen, dass

$$\beta^2 \left(\frac{\nu^2}{4} + \mu\right) = 1.$$

Betrachtet man also als zweite Einheit die Zahl

$$a = \frac{\pm(\frac{1}{2}\nu e - g)}{\sqrt{\frac{\nu^2}{4} + \mu}},$$

so erscheinen die Einheitsproducte

$$e \cdot e = e \qquad e \cdot a = a \cdot e = a \qquad a \cdot a = e.$$

Demnach ist

$$e \cdot e - a \cdot a = 0 \quad \text{d. i.} \quad (e - a) \cdot (e + a) = 0.$$

Es giebt somit zwei Zahlen $e - a$, $e + a$ — beide von 0 verschieden — deren Product gleichwohl 0 ist. — Als definitive Einheiten wählt man die Zahlen

$$j_1 = \frac{e + a}{2} \qquad j_2 = \frac{e - a}{2},$$

wofür man erhält

$$j_1 \cdot j_1 = j_1 \qquad j_1 \cdot j_2 = j_2 \cdot j_1 = 0 \qquad j_2 \cdot j_2 = j_2. \tag{II}$$

Nunmehr ergiebt sich als Multiplicationsregel die Formel

$$(\alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2) \cdot (\beta_1 j_1 + \beta_2 j_2) = (\alpha_1 \beta_1) j_1 + (\alpha_2 \beta_2) j_2. \tag{11}$$

Modulus ist jetzt die Zahl $j_1 + j_2$. Die Gleichung

$$b \cdot x = x \cdot b = a$$

d. i. ($a = \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2$, $b = \beta_1 j_1 + \beta_2 j_2$, $x = \xi_1 j_1 + \xi_2 j_2$ gesetzt)

$$(\beta_1 j_1 + \beta_2 j_2)(\xi_1 j_1 + \xi_2 j_2) = \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2$$

hat eine und nur eine Lösung, wenn $\xi_1\ \xi_2$ sich so bestimmen lassen, dass

$$\beta_1 \xi_1 = \alpha_1 \qquad \beta_2 \xi_2 = \alpha_2$$

ist, also stets wenn β_1 und β_2 von 0 verschieden sind. Ist bloss $\beta_1 = 0$ und $\alpha_1 \gtrless 0$ oder bloss $\beta_2 = 0$ und $\alpha_2 \gtrless 0$, so ist die Division unmöglich.

Dasselbe gilt, wenn $b = 0$ und a nicht 0 ist. Ist $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ und $\beta_2 \gtrless 0$, so hat die Gleichung $b \cdot x = a$ unzählige Lösungen nach x, nämlich $x = \xi_1 j_1 + (\alpha_2 : \beta_2) j_2$ bei willkürlichem ξ_1. Aehnliches tritt ein, wenn $\beta_1 \gtrless 0$ und $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ ist. x kann endlich jede Zahl $\xi_1 j_1 + \xi_2 j_2$ sein, wenn sowohl a als auch b verschwindet.

Die Gleichung

$$x^2 = \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2$$

hat nur dann Wurzeln, wenn keine der Coordinaten $\alpha_1\ \alpha_2$ negativ ist, was sich aus der Formel

$$x^2 = (\xi_1 j_1 + \xi_2 j_2)^2 = \xi_1^2 j_1 + \xi_2^2 j_2$$

sofort ergiebt. Sind α_1 und α_2 positiv, so hat sie die vier Wurzeln

$$x = (\pm \sqrt{\alpha_1}) j_1 + (\pm \sqrt{\alpha_2}) j_2.$$

Man hätte auch ohne die vorhergehende Untersuchung auf das Zahlensystem mit den Einheiten $j_1\ j_2$ kommen können; es entsteht ja einfach durch zweimalige Setzung des Systemes der reellen Zahlen. Von Interesse ist lediglich, dass die hier gemachten Annahmen nur auf dieses triviale System führen.

3) Wenn $\frac{\nu^2}{4} + \mu = 0$ ist, so hat die Gleichung $x^2 = 0$ zufolge (8) unzählige Wurzeln, die nicht Null sind. Wählt man eine solche

$$\beta \left(-\frac{\nu}{2} e + g\right) = j$$

als zweite Einheit, so ergeben sich die Einheitsproducte

$$e \cdot e = e \qquad e \cdot j = j \cdot e = j \qquad j \cdot j = 0. \tag{III}$$

Die Multiplicationsregel lautet jetzt

$$(\alpha e + \beta j) \cdot (\alpha' e + \beta' j) = (\alpha \alpha') e + (\alpha \beta' + \beta \alpha') j. \tag{12}$$

Die Division durch die Zahlen βj ist demnach im Allgemeinen unmöglich und die Gleichung $x^2 = -\alpha e$ $(\alpha > 0)$ hat keine Wurzel.

Wir haben somit drei wesentlich verschiedene Zahlensysteme mit zwei Einheiten kennen gelernt, die eine Multiplication von den angegebenen Eigenschaften zulassen. Sie mögen der Reihe nach als elliptisches, hyperbolisches, parabolisches System bezeichnet werden. Nur das erste hat die Eigenschaft, dass für das Rechnen mit den Zahlen desselben genau dieselben Regeln gelten, wie in der Arithmetik der reellen Zahlen.

Die Zahlen eines jeden der drei Systeme lassen sich geometrisch darstellen. Construirt man in der Ebene den Punkt mit den Parallelcoordinaten $\alpha_1\ \alpha_2$, so wird die ihn mit dem Anfangspunkte der Coordinaten verbindende Strecke ihrer Grösse und Lage nach als Repräsentant der Zahl $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ betrachtet. Auf diese Weise kann man auch die Resultate der vier Rechnungsarten geometrisch deuten. Die Darstellung der Summe und Differenz ist in allen Systemen dieselbe (vgl. XI. 3), die des Productes und Quotienten fällt natürlich verschieden aus.

7. I. Hauptfall. b) Zahlensysteme mit zwei Einheiten, die eine distributive, associative und commutative Multiplication ohne eine indifferente Zahl (Modulus) zulassen.

Es giebt davon drei verschiedene Arten, welche durch die folgenden Einheitsproducte charakterisirt sind:

$$e_1 \cdot e_1 = 0 \qquad e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 0 \qquad e_2 \cdot e_2 = 0 \tag{IV}$$

$$e_1 \cdot e_1 = e_1 \qquad e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 0 \qquad e_2 \cdot e_2 = 0 \tag{V}$$

$$e_1 \cdot e_1 = e_2 \qquad e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 0 \qquad e_2 \cdot e_2 = 0. \tag{VI}$$

Dass bei dieser Annahme der Einheitsproducte die Gleichungen (6), auf welchen die associative Eigenschaft der Multiplication beruht, erfüllt sind, ist unmittelbar ersichtlich. Die in ihnen vorkommenden Producte sind nämlich sämmtlich gleich Null.

Auch dass kein Modulus der Multiplication vorhanden ist, erhellt ohne Weiteres. Denn die Producte sind entweder Null oder Zahlen mit einer einzigen Einheit.

Ausser den genannten drei Zahlensystemen giebt es keine anderen von derselben Beschaffenheit. Vgl. S. 318.

8. II. Hauptfall. Zahlensysteme mit zwei Einheiten, die eine distributive und associative, jedoch nicht-commutative Multiplication zulassen.[1])

Kehren wir jetzt zum Schlusse von Nr. 5 zurück und verfolgen die zweite der dort erwähnten Annahmen.

Annahme 6*. $e_1 \cdot e_2$ und $e_2 \cdot e_1$ seien von einander verschieden. — Damit wird freilich die commutative Eigenschaft des Productes aufgegeben.

Um unter dieser Voraussetzung die associative Eigenschaft der dreigliederigen Einheitsproducte sicher zu stellen, muss, wie bereits a. a. O. auf Grund der ersten und letzten der acht Formeln (4) gefunden wurde, $\lambda_2 = \nu_1 = 0$ sein. Entwickelt man dann die sechs übrigen Formeln (vgl. S. 318 Uebung 2), so gelangt man zum einfachen Ergebnisse, dass entweder

1) Vgl. E. Study, Gött. Nachr. 1889, S. 239 Note.

$$\mu_1 = \nu_2 \quad \mu_2 = 0 \quad \mu_1' = 0 \quad \mu_2' = \lambda_1$$

oder

$$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = \lambda_1 \quad \mu_1' = \nu_2 \quad \mu_2' = 0$$

sein muss, wozu in beiden Fällen die Bedingung tritt, dass λ_1 und ν_2 nicht zugleich verschwinden. Beständen nämlich auch die Gleichungen $\lambda_1 = \nu_2 = 0$, so wäre entgegen der Annahme 6* $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 0$. Wir haben somit noch festzusetzen, dass die Einheitsproducte (Annahme 7*)

$$e_1 \cdot e_1 = \lambda_1 e_1 \quad e_1 \cdot e_2 = \nu_2 e_1 \quad e_2 \cdot e_1 = \lambda_1 e_2 \quad e_2 \cdot e_2 = \nu_2 e_2 \tag{13}$$

oder

$$e_1 \cdot e_1 = \lambda_1 e_1 \quad e_1 \cdot e_2 = \lambda_1 e_2 \quad e_2 \cdot e_1 = \nu_2 e_1 \quad e_2 \cdot e_2 = \nu_2 e_2 \tag{14}$$

seien, wobei $\lambda_1^2 + \nu_2^2 > 0$ sein soll.

Aus den Formeln (13) folgt, dass

$$e_1 \cdot (\nu_2 e_1 - \lambda_1 e_2) = 0 \qquad e_2 \cdot (\nu_2 e_1 - \lambda_1 e_2) = 0$$

ist. Demnach ist bei beliebigen α_1, α_2

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \cdot (\nu_2 e_1 - \lambda_1 e_2) = 0. \tag{15}$$

Es treten somit auch hier verschwindende Producte auf, von denen kein Factor Null ist. Wir führen nun als neue Einheiten ein

$$i_1 = \frac{1}{\xi}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \qquad i_2 = \nu_2 e_1 - \lambda_1 e_2,$$

wobei $\alpha_1 \alpha_2$ beliebige reelle Zahlen sein dürfen, wofür $\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \nu_2$ von Null verschieden ist, und über das ebenfalls reelle ξ später verfügt werden soll. Dann ist nach der Formel (15) $i_1 i_2 = 0$, $i_2 i_2 = 0$. Zufolge (3) und (13) ist

$$\begin{aligned} i_1 \cdot i_1 &= \frac{1}{\xi^2}\left(\alpha_1^2 (e_1 e_1) + (\alpha_1 \alpha_2)(e_1 e_2) + (\alpha_1 \alpha_2)(e_2 e_1) + \alpha_2^2 (e_2 e_2)\right) \\ &= \frac{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \nu_2}{\xi^2}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \frac{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \nu_2}{\xi} i_1. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $\xi = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \nu_2$, so erhalten wir $i_1 \cdot i_1 = i_1$. Ferner hat man

$$\begin{aligned} i_2 \cdot i_1 &= \frac{1}{\xi}\left((\nu_2 \alpha_1)(e_1 e_1) + (\nu_2 \alpha_2)(e_1 e_2) - (\lambda_1 \alpha_1)(e_2 e_1) - (\lambda_1 \alpha_2)(e_2 e_2)\right) \\ &= \frac{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \nu_2}{\xi}(\nu_2 e_1 - \lambda_1 e_2) = i_2. \end{aligned}$$

Somit sind die neuen Einheitsproducte

$$i_1 \cdot i_1 = i_1 \quad i_1 \cdot i_2 = 0 \quad i_2 \cdot i_1 = i_2 \quad i_2 \cdot i_2 = 0. \tag{VII}$$

Auf ähnliche Weise kann man das System mit den Einheitsproducten (14) auf eines mit den Einheiten i_1, i_2 zurückführen, wofür die Formeln gelten:

$$i_1 \cdot i_1 = i_1 \quad i_1 \cdot i_2 = i_2 \quad i_2 \cdot i_1 = 0 \quad i_2 \cdot i_2 = 0. \tag{VIII}$$

„Im System (VII) der Zahlen $x = \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2$ giebt es keinen

vordern Modul der Multiplication d. i. keine Zahl e, wofür bei beliebigem x $e \cdot x = x$ wäre, dagegen unzählig viele hintere Moduln d. i. Zahlen f, wofür bei beliebigem x $x \cdot f = x$ ist." Soll nämlich

$$(\varepsilon_1 i_1 + \varepsilon_2 i_2) \cdot (\xi_1 i_1 + \xi_2 i_2) = \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2$$

sein, so müsste

$$(\varepsilon_1 \xi_1) i_1 + (\varepsilon_2 \xi_1) i_2 = \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2,$$

also $\varepsilon_2 \xi_1 = \xi_2$ sein, was aber für beliebige reelle Zahlen ξ_1 ξ_2 unmöglich ist. — Soll aber

$$(\xi_1 i_1 + \xi_2 i_2) \cdot (\varphi_1 i_1 + \varphi_2 i_2) = \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2$$

sein, so muss

$$(\xi_1 \varphi_1) i_1 + (\xi_2 \varphi_1) i_2 = \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2$$

d. i. $\xi_1 \varphi_1 = \xi_1$ $\xi_2 \varphi_1 = \xi_2$ sein. Diese Gleichungen gelten bei beliebigen ξ_1 ξ_2, wofern nur $\varphi_1 = 1$ ist. Demnach spielen sämmtliche Zahlen $i_1 + \varphi_2 i_2$ (φ_2 beliebig) die Rolle von hintern Moduln der Multiplication.

In dem in Rede stehenden Zahlensysteme ist die erste oder vordere Division eindeutig, wofern die erste Coordinate des Divisors nicht Null ist; die zweite oder hintere Division nie eindeutig. — Bedeuten nämlich $a = \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2$ $b = \beta_1 i_1 + \beta_2 i_2$ gegebene Zahlen, so giebt es eine Zahl $x = \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2$, wofür $x \cdot b = a$ ist, wenn

$$x \cdot b = (\xi_1 \beta_1) i_1 + (\xi_2 \beta_1) i_2 = \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2$$

d. i. $\beta_1 \xi_1 = \alpha_1$ $\xi_2 \beta_1 = \alpha_2$, somit $\xi_1 = \alpha_1 : \beta_1$ $\xi_2 = \alpha_2 : \beta_1$ ist. Soll aber $b \cdot x = a$ sein, so muss

$$b \cdot x = (\beta_1 \xi_1) i_1 + (\beta_2 \xi_1) i_2 = \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2,$$

demnach $\beta_1 \xi_1 = \alpha_1$ $\beta_2 \xi_1 = \alpha_2$ sein. Diese Gleichungen sind, falls $\beta_1 \gtrless 0$ ist, nur möglich, wenn $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$ ist. Dann kann aber ξ_2 jeden beliebigen Werth haben; der hintere Quotient hat somit unzählig viele Werthe. Ist $\beta_1 = 0$, so ist die zweite Division nur möglich, wenn auch $\alpha_1 = 0$ und dabei β_2 nicht Null ist. In diesem Falle kann der hintere Quotient jeden der Werthe $\frac{\alpha_2}{\beta_2} i_1 + \xi_2 i_2$ haben.

Aehnliche Bemerkungen lassen sich über das System (VIII) machen.

9. Die gemeinen complexen Zahlen.

Bezeichnet man den Modulus e des elliptischen Systemes mit 1, so hat man $i \cdot i = -1$; i ist somit eine Wurzel der Gleichung $x^2 = -1$. Da

$$x^2 + 1 = (x - i) \cdot (x + i)$$

nur dadurch Null werden kann, dass ein Factor Null wird, so hat diese Gleichung nur noch die Wurzel $x = -i$.

Die Zahlen mit diesen Einheiten 1 und i heissen gemeine

complexe oder schlechtweg complexe Zahlen; i heisst die imaginäre, auch laterale Einheit, die Zahlen βi imaginäre Zahlen. Von der complexen Zahl $\alpha + \beta i$ heisst α der reelle, βi der imaginäre Theil. Man bezeichnet den letzteren als positiv, Null oder negativ, je nachdem β positiv, Null oder negativ ist, was mit der in Nr. 4 festgesetzten Vergleichung einer Zahl βi mit 0 im Einklange steht. Die Zahlen $\alpha + \beta i$ und $\alpha - \beta i$ ($\beta \gtrless 0$) heissen conjugirt. Bezeichnet man die erstere mit a, so die letztere mit Ka.

Die gemeinen complexen Zahlen, welche unter sich als besondere Fälle die reellen und imaginären Zahlen enthalten, sind die einzige Zahlenart, welche in der gewöhnlichen Arithmetik berücksichtigt zu werden braucht. Es lässt sich nämlich zeigen, dass es ausser ihnen kein System von Zahlen giebt, mit denen genau in derselben Weise gerechnet werden kann, wie mit den reellen. Durch diesen Satz haben wir auch auf dem formalen Wege die natürliche Begrenzung der gewöhnlichen Arithmetik gefunden, so dass wenn uns später Gleichungen begegnen werden, welche durch keine gemeine complexe Zahl befriedigt werden, wir sie als unlösbar betrachten dürfen und an eine fernere Erweiterung des Zahlensystems nicht mehr zu denken brauchen.

Wenn wir einen Blick auf die Nrn. 5—8 werfen, so erkennen wir, dass das System der gemeinen complexen Zahlen eindeutig bestimmt ist durch die folgenden Forderungen. Zu den Erklärungen 1—5 in Nr. 1 und 5 treten noch die drei Annahmen: 1) dass die Multiplication associativ ist, 2) dass es eine solche Zahl e im Systeme giebt, dass bei beliebigem x $e \cdot x = x$ und eine solche f, dass bei beliebigem x $x \cdot f = x$ ist, 3) dass das Product zweier Zahlen nur dann gleich Null sein kann, wenn mindestens eine von ihnen gleich Null ist. Durch die beiden ersteren, aus welchen man unmittelbar schliessen könnte (vgl. S. 300), dass $e = f$ sein muss, werden nämlich sämmtliche Systeme (IV)—(VIII) ausgeschieden. Unter den Systemen (I)—(III) entspricht aber nur das erste der Forderung 3).

Lassen wir die Beschränkung auf die Zweizahl der Einheiten fallen, so giebt es nur noch ein Zahlensystem, welches den soeben erwähnten Forderungen Genüge leistet, die Quaternionen (vgl. Nr. 17). Ihre Multiplication ist indess nicht commutativ. Hieraus erhellt, dass die gemeinen complexen Zahlen in der That die einzigen Zahlen sind, mit welchen genau in derselben Weise gerechnet werden kann, wie mit den reellen.

10. Da für das Rechnen mit den gemeinen complexen Zahlen dieselben Regeln gelten wie für das mit den reellen Zahlen, so lässt sich auch hier der Begriff der Potenz, zunächst mit positivem

ganzen Exponenten einführen und es werden die in VIII. 1, 3 und 4 erwähnten Sätze auch dann bestehen, wenn die Basen der Potenzen complexe Zahlen sind.

Aus jeder complexen Zahl a lässt sich die Quadratwurzel ziehen. Die Gleichung $x^2 = 0$ hat nur die Wurzel $x = 0$. Wenn a nicht Null ist, so hat die Quadratwurzel aus a zwei entgegengesetzte Werthe. Setzt man nämlich

$$a = \alpha + \beta i = (\xi + \eta i)^2,$$

so ergeben sich nach (9) zur Bestimmung der reellen Zahlen ξ η die Gleichungen

$$\alpha = \xi^2 - \eta^2 \qquad \beta = 2\xi\eta,$$

woraus man schliesst

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = (\xi^2 - \eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Somit ist $\xi^2 + \eta^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, also

$$\xi^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha\right) \qquad \eta^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha\right). \tag{16}$$

Ist $\beta = 0$ und α positiv, so hat man $\xi = \pm\sqrt{\alpha}$, $\eta = 0$; ist $\beta = 0$ und α negativ, so $\xi = 0$ $\eta = \pm\sqrt{-\alpha}$. Falls β nicht 0 ist, so sind beim Ziehen der Wurzel aus den rechten Seiten von (16) solche Vorzeichen zu wählen, dass in der That $2\xi\eta = \beta$ ist, so dass auch in diesem Falle nur zwei Werthsysteme ξ η möglich sind.

$\sqrt{\alpha + \beta i}$ bezeichnet irgend einen von den beiden Werthen der Quadratwurzel aus $\alpha + \beta i$. Derjenige von ihnen, dessen erste Coordinate ξ positiv oder falls diese Null ist, dessen zweite Coordinate positiv ist[1]), heisst nach Cauchy der Hauptwerth der Quadratwurzel aus $\alpha + \beta i$ und wird mit $\sqrt{\alpha + \beta i}$ bezeichnet. Der andere Werth heisst ihr Nebenwerth. Insbesondere ist i der Hauptwerth der Quadratwurzel aus -1, also $i = \sqrt{-1}$.[2])

Hieraus ergiebt sich, dass jede quadratische Gleichung

$$ax^2 + 2bx = -c \qquad (|a| > 0),$$

deren Discriminante $ac - b^2$ nicht Null ist, zwei ungleiche Wurzeln hat. Multiplicirt man nämlich die Gleichung mit a und addirt beiderseits b^2, so erhält man

$$(ax + b)^2 = b^2 - ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

---

1) Der genannte Hauptwerth ist demnach zufolge der Festsetzungen von Nr. 4 als positiv zu bezeichnen.

2) Das Zeichen i für $\sqrt{-1}$ kommt zwar bei Euler (vgl. z. B. Institutionum calculi integralis IV. 1794, S. 184) vor, ist jedoch erst seit Gauss (vgl. z. B. Werke I. S. 414) allgemein angenommen.

Wenn $b^2 - ac$ nicht Null ist, so hat die Quadratwurzel daraus, folglich auch x zwei Werthe. Ist $b^2 - ac = 0$, so lässt unsere Gleichung nur die eine Lösung $x = -b:a$ zu. Man nennt diese Wurzel wiederholt, weil der Ausdruck $ax^2 + 2bx + c$ in die Form

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2$$

gebracht werden kann.

Diejenigen höheren Wurzeln aus a, welche nicht auf Quadratwurzeln zurückführbar sind, lassen sich im Allgemeinen nicht so darstellen, wie die Quadratwurzeln.

Versucht man die Cubikwurzel aus der complexen Zahl a d. i. zwei reelle Zahlen ξ η zu ermitteln, wofür

$$(\xi + \eta i)^3 = a = \alpha + \beta i$$

ist, so stösst man auf die Gleichungen

$$\xi^3 - 3\xi\eta^2 = \alpha \qquad 3\xi^2\eta - \eta^3 = \beta. \tag{17}$$

Daraus ergiebt sich

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\xi^2 + \eta^2)^3. \tag{17*}$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth von η^2 in die erste der Gleichungen (17) ein, so findet man

$$4\xi^3 - 3\varrho\xi = \alpha,$$

unter ϱ die reelle $\sqrt[3]{\alpha^2 + \beta^2}$ verstanden. In der Algebra wird gezeigt, dass diese Gleichung, falls β nicht verschwindet, drei reelle Wurzeln hat (vgl. S. 319, 8)). Es ist jedoch, besondere Werthe von α β z. B. $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ abgerechnet, nicht möglich, für ξ η endliche reelle algebraische Formeln zu erhalten.[1]) Die in Rede stehende Aufgabe führt auf den Casus irreducibilis der cubischen Gleichungen. ξ η lassen sich aber durch unendliche Reihen reell ausdrücken.

11. Absoluter Betrag einer gemeinen complexen Zahl.

Der absolute Werth von $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ heisst absoluter Betrag der complexen Zahl $a = \alpha + \beta i$ und wird kurz mit $|a|$ bezeichnet. Dieser von Weierstrass[2]) vorgeschlagene Name für $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ drückt, da die Quadratwurzel im Falle $\beta = 0$ den absoluten Betrag der reellen Zahl α darstellt, eine naturgemässe Verallgemeinerung dieses Begriffes aus, was sich im Folgenden bestätigen wird, und ist dem Argand-schen[3]) „Modul von a" vorzuziehen. — Das Binom $\alpha^2 + \beta^2$ selbst heisst die Norm der complexen Zahl $\alpha + \beta i$.

Zunächst finden wir die in III. 13 und 14 für rationale Zahlen ausgesprochenen und später auf die reellen Zahlen ausgedehnten Sätze wieder, auf die wir uns in der Folge häufig berufen werden.

---

1) Vgl. O. Hölder, Math. Ann. 38. Bd. S. 307; A. Kneser, ebenda 41. Bd. S. 344.

2) Vgl. Weierstrass, Crelle J. Bd. 52, S. 289 und Pincherle a. a. O. p. 211. Vgl. auch S. 63 Note 1).

3) Argand, Gergonne Ann. V. S. 208.

1) „Der absolute Betrag der Summe zweier complexen Zahlen ist nicht grösser als die Summe ihrer absoluten Beträge und nicht kleiner als die Differenz derselben. Wenn von den beiden Addenden

$$a = \alpha + \beta i \qquad a' = \alpha' + \beta' i$$

keiner Null ist, so ist $|a + a'| = |a| + \varepsilon |a'|$ $(\varepsilon = \pm 1)$ dann und nur dann, wenn

$$\alpha' = \omega\alpha \qquad \beta' = \omega\beta \qquad (\varepsilon\omega > 0) \tag{18}$$

ist.“ Man hat

$$|a + a'|^2 = (\alpha + \alpha')^2 + (\beta + \beta')^2$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha'^2 + \beta'^2) + 2(\alpha\alpha' + \beta\beta'),$$

worin

$$\alpha^2 + \beta^2 = |a|^2 \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 = |a'|^2$$

ist. Demnach ist, wenn man $\alpha\alpha' + \beta\beta' = \eta$ setzt,

$$\{|a| + \varepsilon |a'|\}^2 - |a + a'|^2 = 2\varepsilon\{|a| \cdot |a'| - \varepsilon\eta\}. \tag{19}$$

Vermöge der bekannten Identität

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2) = (\alpha\alpha' + \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 \tag{20}$$

hat man

$$(\alpha\alpha' + \beta\beta')^2 \leqq (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2),$$

also sicher, mag $\varepsilon = +1$ oder -1 sein, $\varepsilon\eta \leqq |a| \cdot |a'|$. Mithin ist nach (19)

$$|a| - |a'|^2 \leqq |a + a'|^2 \leqq \{|a| + |a'|\}^2.$$

Hieraus folgt, wenn $|a| \geqq |a'|$ vorausgesetzt wird,

$$|a| - |a'| \leqq |a + a'| \leqq |a| + |a'|.$$

In dieser Doppelbeziehung treten beide Gleichheitszeichen auf, wenn $a' = 0$ ist. Ferner ist zufolge (19)

$$|a + a'| = |a| + \varepsilon |a'|,$$

wenn $|a| \cdot |a'| = \varepsilon\eta$ ist. Dazu ist aber nach (20) das Bestehen der Gleichung

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = 0$$

erforderlich und diese liefert, wenn wir jetzt $|a'| > 0$ und damit auch $|a| > 0$ voraussetzen, die Formeln

$$\alpha' = \omega\alpha \qquad \beta' = \omega\beta \qquad (\omega \gtrless 0).$$

Also ist $\eta = \omega(\alpha^2 + \beta^2)$ und demnach $|a'| = \varepsilon\omega |a|$; es muss also $\varepsilon\omega > 0$ sein.

2) „Der absolute Betrag der Summe von beliebig vielen complexen Zahlen ist nicht grösser als die Summe ihrer absoluten Beträge — und zwar dieser Summe gleich dann und nur dann, wenn für je zwei der von 0 verschiedenen Addenden, a und a', die Beziehungen (18) bestehen oder wenn sich jeder von

ihnen durch einen, a, in der Form ωa darstellen lässt, wobei ω eine positive Zahl ist." — Der Satz ergiebt sich unmittelbar aus dem ersten Theile des vorhergehenden. Da nämlich $a+a'+a''=(a+a')+a''$ ist, so findet man daraus

$$|a+a'+a''| \leqq |a+a'| + |a''| \leqq |a| + |a'| + |a''| \text{ u. s. f.}$$

3) Der absolute Betrag eines Productes ist gleich dem Producte der absoluten Beträge seiner Factoren. — Es genügt wieder die Betrachtung des Productes von zwei Factoren. Nach (9) ist

$$a \cdot a' = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + (\alpha\beta' + \beta\alpha')i;$$

demnach hat man

$$|a \cdot a'|^2 = (\alpha\alpha' - \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' + \beta\alpha')^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2)$$

und somit

$$|a \cdot a'| = |a| \cdot |a'|.$$

Aus diesem Satze ergiebt sich unmittelbar:

4) „Der absolute Betrag eines Quotienten ist gleich dem Quotienten: absoluter Betrag des Dividends gebrochen durch den des Divisors."

Die vorstehenden Sätze lassen sich zu folgendem zusammenfassen:

5) „Bildet man aus reellen und complexen Zahlen $a, a', a'' \cdots$ in endlicher Anzahl ein Aggregat von Monomen $F(a, a', a'' \cdots)$, so hat man stets

$$|F(a, a', a'' \cdots)| \leqq \Phi(|a|, |a'|, |a''| \cdots),$$

wo Φ den aus F dadurch hervorgehenden Ausdruck bedeutet, dass das Zeichen — überall durch $+$ ersetzt wird."

6) Wenn der absolute Betrag einer complexen Zahl $a = \alpha \pm \beta i$ kleiner ist als eine jede positive Zahl, so ist $a = 0$. — Denn die Annahme verträgt sich nicht damit, dass auch nur eine der Zahlen $\alpha\,\beta$ von Null verschieden ist. Der Satz giebt ein Mittel an die Hand, die Gleichheit von zwei complexen Zahlen zu erweisen; es folgt nämlich daraus:

7) Wenn die Differenz zweier complexen Zahlen $a\ a'$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist als eine jede positive Zahl, so ist $a = a'$.

12. Complexe Zahlen mit n Einheiten. Addition und Subtraction derselben.

In Nr. 1 sind wir, von der Paarung reeller Zahlen ausgehend, zu den complexen Zahlen mit zwei Einheiten gelangt. Dieser Vorgang lässt sich naturgemäss dahin verallgemeinern, dass man statt der Zahlenpaare Zusammenstellungen von je n reellen Zahlen der Betrachtung unterzieht.

In Uebereinstimmung mit dem Früheren setzen wir demgemäss fest:[1])

1. Definition. Jeder Zusammenstellung von je n in bestimmter Anordnung auf einander folgenden, reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ soll ein neues Ding $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$ zugeordnet sein. Anstatt $(0, 0 \cdots 0)$ wird 0 geschrieben.

Um diese Dinge zu Grössen zu machen, erklären wir:

2. Definition. $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$ und $(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n)$ sind dann und nur dann einander gleich, wenn $\alpha_r = \beta_r$ $(r = 1, 2 \cdots n)$ ist. Es sei also $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) = 0$ dann und nur dann, wenn $\alpha_r = 0$ $(r = 1, 2 \cdots n)$ ist.

3. Definition. Als Summe $a + b$ der Grössen

$$a = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) \quad \text{und} \quad b = (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n)$$

betrachten wir die Grösse $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2 \cdots \alpha_n + \beta_n)$, so dass

$$(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2 \cdots \alpha_n + \beta_n)$$

ist.

Eine Grösse a heisst[2]) grösser (kleiner) als eine andere b, wenn die erste von Null verschiedene Differenz in der Reihe

$$\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2 \cdots \alpha_n - \beta_n$$

einen positiven (negativen) Werth hat.

4. Definition. Unter ϱa oder $a\varrho$, worin ϱ eine beliebige reelle Zahl vorstellt, hat man die Grösse $(\varrho\alpha_1, \varrho\alpha_2 \cdots \varrho\alpha_n)$ zu verstehen.

Bezeichnet man jene der Grössen $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$, in der, unter m eine bestimmte der Zahlen $1, 2 \cdots n$ verstanden, $\alpha_m = 1$ ist, während alle übrigen α_r $(r \gtrless m)$ den Werth Null haben, mit e_m, so besteht auf Grund der 3. und 4. Definition für jede Grösse $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$ die Gleichung

$$(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Eine in dieser Form darstellbare Grösse bezeichnet man als eine complexe Zahl mit den n Einheiten $e_1, e_2 \cdots e_n$. Die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ heissen ihre Coordinaten oder auch Componenten. Die Einheiten $e_1, e_2 \cdots e_n$ bilden zusammen eine Basis des Zahlensystems.[3])

---

1) Auch die n-tupel $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$ gehen auf Hamilton zurück (vgl. die Vorrede zu dessen Lectures on quaternions).

2) Nach J. Thomae (vgl. Abriss einer Theorie der complexen Functionen 1870, S. 41).

3) Die complexe Zahl mit n Einheiten hat H. Grassmann unter dem Namen einer „extensiven“ Grösse eingeführt (vgl. die Ausdehnungslehre 1862 S. 2). Ebenda (S. 3 und 4) finden sich die Definitionen (1) und (2) auf S. 295, desgleichen S. 23 die Productformel (7) auf S. 296). Nur hat Grassmann den Fall, dass die Einheitsproducte wieder Zahlen des ursprünglichen Systems sind,

Die Erklärungen 2., 3. und 4. erhalten nunmehr die folgende Gestalt:

(2. Def.) Es ist dann und nur dann

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n,$$

wenn $\alpha_r = \beta_r$ $(r = 1, 2 \cdots n)$ ist. Insbesondere hat man dann und nur dann

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots \alpha_n e_n = 0,$$

wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ ist.

(3. Def.) Es ist

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) + (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n)$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) e_n. \qquad (1)$$

(4. Def.) Es ist

$$\varrho(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n)\varrho$$
$$= (\varrho\alpha_1) e_1 + (\varrho\alpha_2) e_2 + \cdots + (\varrho\alpha_n) e_n. \qquad (2)$$

Unter den bis jetzt gemachten Voraussetzungen gelten hinsichtlich der Addition und Subtraction der complexen Zahlen mit n Einheiten dieselben Regeln, wie bei den reellen Zahlen. Auch ist allgemein

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \varrho(\sigma a) = (\varrho\sigma) a \\ 2)\ (\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m) a = \varrho_1 a + \varrho_2 a + \cdots + \varrho_m a \\ 3)\ \varrho(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) = \varrho a_1 + \varrho a_2 + \cdots + \varrho a_m. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Zwischen den n Einheiten $e_1, e_2 \cdots e_n$ besteht keine lineare Gleichung, denn eine solche lässt sich stets auf die Form

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n = 0$$

bringen, woraus sich lediglich

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0 \quad \cdots \quad \xi_n = 0$$

ergiebt. Auch ist nunmehr ersichtlich, dass je n Zahlen $a_1, a_2 \cdots a_n$ des Systems:

$$a_r = \alpha_{r,1} e_1 + \alpha_{r,2} e_2 + \cdots + \alpha_{r,n} e_n, \qquad (4)$$

welche so gewählt sind, dass die Determinante

$$|\alpha_{r,s}| \quad \left(\begin{matrix} r \\ s \end{matrix}\right\} = 1, 2 \cdots n \Big)$$

nicht Null ist, als Einheiten des Systems betrachtet werden dürfen. Man kann nämlich die n Gleichungen (4) so nach $e_1, e_2 \cdots e_n$ auflösen, als wenn darin nur relle Zahlen vorkommen würden.

Wie bei den complexen Zahlen mit zwei Einheiten kann auch hier von den Beziehungen „grösser" und „kleiner" durch Einführung neuer Einheiten die eine in die andere übergehen.

---

nicht erwähnt. — Im Folgenden bedeuten $\alpha\ \beta\ \gamma \cdots$ ausschliesslich reelle, $a\ b\ c \cdots$ complexe Zahlen.

13. Multiplication der complexen Zahlen mit n Einheiten.

Durch die bisher gestellten Forderungen ist das System complexer Zahlen noch nicht vollständig charakterisirt. Man verlangt vielmehr von einem solchen, dass es ausser der Addition und Subtraction wenigstens noch eine dritte Operation, die sogenannte Multiplication, zulasse, d. h. dass es ausser den Verknüpfungen $a + b$ und $a - b$ noch eine dritte, durch $a \cdot b$ ausgedrückte Verknüpfung zweier Zahlen a und b des Systems gebe, der bei beliebiger Wahl dieser Zahlen und ihrer Anordnung je eine Zahl desselben Systems, das Product, das ebenfalls mit $a \cdot b$ bezeichnet wird, nach bestimmten Gesetzen zugeordnet ist. Dabei fordern wir vor allem die unbeschränkte Commutabilität der reellen Coefficienten (Multiplicatoren) d. h. das Bestehen der Gleichung

$$(\varrho a) \cdot (\sigma b) = (\varrho \sigma)(a \cdot b).$$

Ferner soll sich unter den erwähnten Gesetzen jedenfalls jene für die Multiplication der reellen und der gemeinen complexen Zahlen charakteristische Beziehung derselben zur Addition vorfinden, die wir unter dem Namen des distributiven Gesetzes kennen gelernt haben. Um diesen Forderungen zu entsprechen, setzen wir zunächst fest:

5. Definition. 1) Jedes Einheitsproduct $e_r \cdot e_s$ sei eine Zahl des aus den Einheiten $e_1, e_2 \cdots e_n$ abgeleiteten Zahlensystems, d. i.

$$e_r \cdot e_s = \lambda_{r,s}^{(1)} e_1 + \lambda_{r,s}^{(2)} e_2 + \cdots + \lambda_{r,s}^{(n)} e_n \qquad (r, s = 1, 2 \cdots n). \tag{5}$$

2) Es sei

$$(\alpha_r e_r) \cdot (\beta_s e_s) = (\alpha_r \beta_s)(e_r \cdot e_s) \qquad (r, s = 1, 2 \cdots n). \tag{6}$$

3) Für das Product $a \cdot b$ bestehe die Gleichung

$$a \cdot b = \sum_1^n {}^r \alpha_r e_r \cdot \sum_1^n {}^s \beta_s e_s = \sum_{r,s=1}^n (\alpha_r e_r) \cdot (\beta_s e_s),$$

d. h. um das Product $a \cdot b$ zu bilden, hat man jedes Glied des Multiplicands a mit jedem des Multiplicators b zu multipliciren und die so erhaltenen Producte zu addiren.

Dieser letzten Gleichung kann man mit Hilfe von (6) und (5) die Gestalt

$$a \cdot b = \sum_{r,s=1}^n (\alpha_r \beta_s)(e_r \cdot e_s) = \sum_{r,s,t=1}^n \alpha_r \beta_s \lambda_{r,s}^{(t)} e_t \tag{7}$$

verleihen. Daraus folgt zunächst die Formel

$$(\varrho a) \cdot (\sigma b) = (\varrho \sigma)(a \cdot b), \tag{8}$$

worin ϱ und σ reelle Zahlen bedeuten. Ferner gewinnt man daraus die beiden Seiten des distributiven Gesetzes, d. h. es gelten allgemein die Gleichungen

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{und} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Ist nämlich

$$c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \cdots + \gamma_n e_n,$$

so lautet das allgemeine Glied von $(a + b) \cdot c$

$$[(\alpha_r + \beta_r)\gamma_s](e_r \cdot e_s) = (\alpha_r \gamma_s)(e_r \cdot e_s) + (\beta_r \gamma_s)(e_r \cdot e_s)$$

und hieraus lässt sich die Richtigkeit der ersteren der vorstehenden Formeln unmittelbar erkennen. Auf ähnliche Weise überzeugt man sich auch von der Giltigkeit der letzteren.

Ein System complexer Zahlen, das den bisherigen Forderungen genügt, ist bestimmt, wenn von ihm neben der Anzahl n der Einheiten noch die Coefficienten $\lambda_{r,s}^{(t)}$ der Einheitsproducte gegeben sind. Zwei Zahlensysteme mit derselben Anzahl von Einheiten können aber trotz der Verschiedenheit ihrer Coefficienten $\lambda_{r,s}^{(t)}$ identisch sein, da sich diese Coefficienten ja auch bei Einführung neuer Einheiten, d. i. bei einer Transformation des Systems ändern.

14. Division der complexen Zahlen mit n Einheiten.

Ein wesentlicher, von der Wahl der Einheiten unabhängiger Unterschied in den Zahlensystemen mit gleicher Einheitenanzahl tritt erst dann hervor, wenn man dieselben in Bezug auf die Möglichkeit und Zulässigkeit der Division prüft, d. h. untersucht, ob oder welche Wurzeln x den beiden Gleichungen

$$x \cdot b = a \quad \text{und} \quad b \cdot x = a \tag{9}$$

im Systeme zukommen. Die Auflösung der ersteren bezeichnet man als die erste oder vordere, die der letzteren als die zweite oder hintere Division. Jede Wurzel der ersteren heisst dementsprechend ein erster oder vorderer, jede der letzteren ein zweiter oder hinterer Quotient des Dividends a durch den Divisor b. Dass aber diese beiden Quotienten, auch im Falle der Eindeutigkeit der Division, im allgemeinen von einander verschieden ausfallen können, hat seinen Grund darin, dass wir bei der Erklärung der Multiplication das commutative Gesetz nicht in Anspruch genommen haben.

Wir untersuchen nun zunächst, ob es eine Zahl

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

gebe, welche die Gleichung $x \cdot b = a$ befriedigt. Hierzu ist gemäss der Formel (7) nothwendig und hinreichend, dass die $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n$ den n linearen Gleichungen

$$\sum_{r=1}^{n} \left(\xi_r \sum_{s=1}^{n} \beta_s \lambda_{r,s}^{(t)} \right) = \alpha_t \qquad (t = 1, 2 \cdots n)$$

genügen. Bekanntlich giebt es ein und nur ein System solcher Zahlen ξ_r, wenn die Determinante n^{ter} Ordnung

$$\Delta(b) = \left| \sum_{s=1}^{n} \beta_s \lambda_{r,s}^{(t)} \right| \qquad \left(\begin{matrix} r \\ t \end{matrix} \right\} = 1, 2 \cdots n \Big) \tag{10}$$

nicht Null ist. In diesem Falle ist also die erste Division möglich und eindeutig. Ist aber $\Delta(b) = 0$, so ist sie nur dann ausführbar, wenn zwischen den Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ eine Relation besteht; es giebt aber dann unendlich viele erste Quotienten von a durch b.

Die Determinante $\Delta(b)$ der ersten Division ist von der Anzahl n der Einheiten, von den Coefficienten $\lambda_{r,s}^{(t)}$ der Einheitsproducte und von dem Divisor b, bezw. dessen Coordinaten β_r abhängig. Denken wir .uns n als feststehend, so können noch die Einheitsproducte so beschaffen sein, dass $\Delta(b)$ identisch, d. h. für alle Zahlen b des Zahlensystems verschwindet. In diesem Falle ist die erste Division entweder unmöglich oder unendlich vieldeutig, und wir sagen dann, die erste Division sei unzulässig oder das Zahlensystem besitze keine erste Division.

Ist hingegen $\Delta(b)$ nicht identisch, sondern nur für besondere Werthe von b Null, so ist die erste Division für alle jene Divisoren b, für welche $\Delta(b)$ nicht verschwindet, möglich und eindeutig, und wir sagen, das System lasse die erste Division zu.

Demnach giebt es Zahlensysteme mit erster Division und solche ohne dieselbe. Die Eigenschaft, dass ein Zahlensystem eine erste Division besitzt oder nicht, ist ein wesentliches, von der Wahl der Einheiten unabhängiges Merkmal desselben. Denn hat die Gleichung $x \cdot b = a$ eine Wurzel $x = c$ und gehen die Zahlen $a, b, c, d \cdots$ bei der Transformation des Systems in $a', b', c', d' \cdots$ über, so genügt der Gleichung $x' \cdot b' = a'$ die Zahl $x' = c'$ und umgekehrt. Besitzt $x \cdot b = a$ noch eine zweite von c verschiedene Wurzel d, so ist auch d' von c' verschieden und man hat $d' \cdot b' = a'$. Die Gleichungen $x \cdot b = a$ und $x' \cdot b' = a'$ besitzen also stets dieselbe Anzahl von Wurzeln.

Aehnliches lässt sich über die zweite Division sagen. Dazu, dass der Gleichung $b \cdot x = a$ eine Zahl x des Systemes genüge, ist erforderlich und hinreichend, dass die Coordinaten ξ_s von x die n linearen Gleichungen

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\xi_s \sum_{r=1}^{n} \beta_r \lambda_{r,s}^{(t)} \right) = \alpha_t \qquad (t = 1, 2 \cdots n)$$

befriedigen. Bezeichnen wir die Determinante der zweiten Division mit $\Delta'(b)$, indem wir

$$\Delta'(b) = \left| \sum_{r=1}^{n} \beta_r \lambda_{r,s}^{(t)} \right| \qquad \left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \right\} = 1, 2 \cdots n \Big) \tag{11}$$

setzen, so kommen wir wieder zu dem Schlusse: In dem in Rede stehenden Zahlensysteme ist die zweite Division (im allgemeinen) möglich und eindeutig, wenn $\Delta'(b)$ nicht identisch verschwindet, dagegen besitzt das System keine (eindeutige) zweite Division, wenn $\Delta'(b)$ identisch Null ist.

Zwei Zahlensysteme, die sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass das eine von ihnen nur die vordere, das andere nur die hintere Division zulässt, können nicht als von einander wesentlich verschieden betrachtet werden, ihr Unterschied lässt sich lediglich auf eine Verschiedenheit in der Schreibweise zurückführen. Lässt man nämlich in allen Producten je zweier Zahlen des einen Systems Multiplicand und Multiplicator ihre Plätze wechseln, d. h. schreibt man in dem einen Systeme den Multiplicator hinter, in dem andern vor den Multiplicanden, so fallen beide Systeme zusammen.

Auf Grund dieser Bemerkung lassen sich in Hinsicht auf die Division noch drei wesentlich verschiedene Arten von Zahlensystemen unterscheiden und zwar:

1) Systeme mit beiderseitiger oder vollständiger (erster und zweiter) Division,

2) Systeme mit einseitiger (erster oder zweiter) Division,

3) Systeme ohne (eindeutige) Division. Alle drei Arten sind, wie ein Rückblick auf die Nummern 6—8 zeigt, schon unter den Systemen mit zwei Einheiten vertreten.

An das Vorstehende schliesst sich unmittelbar der folgende Satz an:

Satz 1. Ist in einem Zahlensysteme (mindestens) ein vorderer (hinterer) Modul der Multiplication vorhanden, so ist in demselben die hintere (vordere) Division zulässig.

Beweis: Nehmen wir an, das in Rede stehende Zahlensystem besitze einen vorderen Modul der Multiplication, d. h. es gebe in demselben eine Zahl

$$e = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \cdots + \varepsilon_n e_n$$

von der Beschaffenheit, dass die Gleichung $e \cdot x = x$ für jede Zahl x des Systems erfüllt ist, dann hat man zufolge der Gleichung (7)

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\xi_s \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{r,s}^{(t)} \right) = \xi_t \qquad (t = 1, 2 \cdots n).$$

Da diese n Gleichungen für jedes Werthsystem $\xi_1\ \xi_2 \cdots \xi_n$ bestehen sollen, so muss

$$\sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{r,t}^{(t)} = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{r,s}^{(t)} = 0 \qquad (s \gtrless t)$$

sein. Es ist daher nach (11)

$$\Delta'(e) = \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{r,1}^{(1)} \cdot \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{r,2}^{(2)} \cdots \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{r,n}^{(n)} = 1.$$

Im Falle des Vorhandenseins eines vorderen Moduls e der Multiplication kann also die Determinante $\Delta'(b)$ der hinteren Division nicht identisch Null sein, da sie für $b = e$ den Werth 1 annimmt. Es ist daher in diesem Falle im Systeme die hintere Division zulässig.

Ebenso lässt sich zeigen, dass das Zahlensystem beim Vorhandensein eines hinteren Moduls f wenigstens die einseitige vordere Division zulassen muss.

Folgesätze: 1) Ein Zahlensystem mit nur einseitiger vorderer (hinterer) Division besitzt keinen vorderen (hinteren) Modul der Multiplication.

2) In einem Zahlensysteme ohne (eindeutige vordere und hintere) Division ist weder ein vorderer noch ein hinterer Modul der Multiplication vorhanden.

3) Wenn in einem Zahlensysteme sowohl ein vorderer als auch ein hinterer Modul der Multiplication vorhanden ist, so lässt dasselbe sowohl die erste als auch die zweite Division zu.

Bezüglich der Moduln der Multiplication gelten ferner noch die nachstehenden allgemeinen Sätze:

Satz 2. Ist in einem Zahlensysteme sowohl ein vorderer e als auch ein hinterer Modul f vorhanden, so sind dieselben einander gleich. Neben e giebt es keinen vorderen, neben f keinen hinteren Modul der Multiplication mehr.

Beweis: Für jede beliebige Zahl x des Systems ist $e \cdot x = x$, also für $x = f$

$$e \cdot f = f. \tag{12}$$

Ebenso hat man $x \cdot f = x$, also für $x = e$

$$e \cdot f = e. \tag{13}$$

Aus den Gleichungen (12) und (13) ergiebt sich aber $f = e$.

Wäre neben e noch e' ein vorderer Modul, so würde man in derselben Weise $e' = f$ finden, wonach $e' = e$ sein muss. Ebenso ergiebt sich aus der Annahme, dass neben f auch f' ein hinterer Modul sei, $f' = f$.

Satz 3. In einem Zahlensysteme, in welchem mindestens ein vorderer (hinterer) Modul e, jedoch kein hinterer (vorderer) Modul der Multiplication vorhanden ist, kann die Multiplication nicht commutativ sein.

Wäre nämlich die Multiplication commutativ, so müsste neben $e \cdot x = x$ auch $x \cdot e = x$ sein, d. h. e wäre nicht nur ein vorderer, sondern ein doppelseitiger Modul.

Folgesatz 4. Jedes Zahlensystem mit commutativer Multiplication besitzt entweder einen einzigen, doppelseitigen, oder aber gar keinen (auch nicht einen einseitigen) Modul der Multiplication.

15. Zahlensysteme mit n Einheiten, die eine associative Multiplication zulassen.

Wir wollen nun die Multiplication auch dem associativen Gesetze unterwerfen. Zu diesem Behufe treffen wir von jetzt an die Voraussetzung:

6. Definition. Es seien die Producte aus je drei Einheiten associativ, d. h. es gelten die Gleichungen

$$(e_r \cdot e_s) \cdot e_t = e_r \cdot (e_s \cdot e_t) \qquad (r, s, t = 1, 2 \ldots n). \tag{14}$$

Nach den Formeln (5) ist

$$(e_r \cdot e_s) \cdot e_t = \sum_{v=1}^{n} \lambda_{r,s}^{(v)} (e_v \cdot e_t) = \sum_{v,w=1}^{n} \lambda_{r,s}^{(v)} \lambda_{v,t}^{(w)} e_w$$

und

$$e_r \cdot (e_s \cdot e_t) = \sum_{v=1}^{n} \lambda_{s,t}^{(v)} (e_r \cdot e_v) = \sum_{v,w=1}^{n} \lambda_{s,t}^{(v)} \lambda_{r,v}^{(w)} e_w,$$

also zufolge unserer Voraussetzung

$$\sum_{v=1}^{n} \lambda_{r,s}^{(v)} \lambda_{v,t}^{(w)} = \sum_{v=1}^{n} \lambda_{s,t}^{(v)} \lambda_{r,v}^{(w)} \qquad (r, s, t, w = 1, 2 \cdots n). \tag{15}$$

Aus den Gleichungen (14) findet man für das Product dreier beliebiger Zahlen a, b, c des Systems

$$(a \cdot b) \cdot c = \sum_{r,s=1}^{n} (\alpha_r \beta_s)(e_r \cdot e_s) \cdot \sum_{t=1}^{n} \gamma_t e_t = \sum_{r,s,t=1}^{n} (\alpha_r \beta_s \gamma_t)((e_r \cdot e_s) \cdot e_t)$$

$$= \sum_{r,s,t=1}^{n} (\alpha_r \beta_s \gamma_t)(e_r \cdot (e_s \cdot e_t));$$

es ist aber auch

$$a \cdot (b \cdot c) = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r e_r \cdot \sum_{s,t=1}^{n} (\beta_s \gamma_t)(e_s \cdot e_t) = \sum_{r,s,t=1}^{n} (\alpha_r \beta_s \gamma_t)(e_r \cdot (e_s \cdot e_t))$$

und somit

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

d. h. es gilt das associative Gesetz für jedes Product aus drei Zahlen des Systems. Damit also die Multiplication in dem betrachteten Zahlensysteme dem associativen Gesetze gehorche, ist erforderlich und hinreichend, dass zwischen den Coefficienten $\lambda_{r,s}^{(t)}$ der Einheitsproducte die Relationen (15) bestehen.

Infolge dieser Relationen treten die Einheiten $e_1, e_2 \cdots e_n$ sowohl unter einander als auch zu den reellen Zahlen in eine gewisse Beziehung. Das letztere muss daher auch für alle aus den genannten Einheiten ableitbaren Zahlen d. i. für alle Zahlen des Systems der Fall sein. In der That genügt eine jede Zahl x eines solchen Zahlensystems einer algebraischen Gleichung mit reellen Coefficienten.[1])

Um diese Behauptung zu erweisen, haben wir vorerst den Begriff der Potenz auch auf die Zahlen der hier behandelten Systeme zu übertragen. Dieses geschieht, indem wir das Product aus m gleichen Factoren x mit x^m bezeichnen und als die m^{te} Potenz von x erklären. Dazu fügen wir noch die Erklärung $x^1 = x$. Auf Grund des Bestehens des associativen Gesetzes für die Multiplication hat man nämlich

$$x^2 \cdot x = x \cdot x^2 = x^3, \quad x^3 \cdot x = x^2 \cdot x^2 = x \cdot x^3 = x^4$$

u. s. w., allgemein

$$x^{m_1} \cdot x^{m_2} \cdots x^{m_r} = x^{m_1 + m_2 + \cdots + m_r}, \tag{16}$$

wodurch sowohl die Bezeichnungsweise x^m als auch der Name „Potenz" für das Product aus m gleichen Factoren x völlig gerechtfertigt erscheint.

Setzen wir nun

$$x^r = \xi_{r,1} e_1 + \xi_{r,2} e_2 + \cdots + \xi_{r,n} e_n \qquad (r = 1, 2 \cdots n) \tag{17}$$

und bezeichnen die Determinante dieses Gleichungssystems mit Ξ, d. i.

$$\Xi = | \xi_{r,s} | \qquad \left(\begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \right\} = 1, 2 \cdots n \Big),$$

so lassen sich, falls die Zahl x so beschaffen ist, dass $\Xi \gtrless 0$ ist, die Einheiten $e_1, e_2 \cdots e_n$ und mit ihnen alle Zahlen des Systems linear und homogen durch die Potenzen $x, x^2, x^3 \cdots x^n$ ausdrücken. Insbesondere besteht für x^{n+1} eine Gleichung von der Form

$$x^{n+1} = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n.$$

Nimmt man hingegen an, dass die Determinante Ξ den Werth Null habe, so verlangt die Coexistenz der Gleichungen (17) das Bestehen einer linearen und homogenen Gleichung zwischen den Potenzen $x, x^2 \cdots x^n$, also

$$\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_{n-1} x^{n-1} + \beta_n x^n = 0.$$

Hierin können auch mehrere der Coefficienten β_r verschwinden, jedoch nicht alle zugleich, falls nicht $x = 0$ ist, was wir ausschliessen. Es können aber auch nicht alle Coefficienten mit Ausschluss von β_1 verschwinden, weil aus $\beta_1 x = 0$ wieder $x = 0$ folgen würde.

1) Vgl. F. Grissemann, Monatshefte für Math. und Phys. XI. Jahrg. S. 137.

Fassen wir nun die beiden Fälle zusammen, so können wir sagen: Es besteht für jede Zahl x des Systems eine Gleichung von der Gestalt

$$x^m + \nu_1 x^{m-1} + \cdots + \nu_{m-2} x^2 + \nu_{m-1} x = 0 \quad (2 \leqq m \leqq n+1). \quad (18)$$

Weil die weitere Verfolgung dieser Gleichung eine neue Einschränkung des Zahlensystems nöthig macht, wollen wir einstweilen von derselben absehen und dafür noch einige, für alle associativen[1]) Zahlensysteme giltige Sätze über die Moduln der Multiplication anknüpfen.

Satz 1. Jedes associative Zahlensystem, das die hintere (vordere) Division (im allgemeinen) zulässt, besitzt mindestens **einen** vorderen (hinteren) Modul der Multiplication.

Beweis: Nehmen wir an, das System lasse die hintere Division zu und es sei b eine Zahl des Systems, für welche die Determinante $\Delta'(b)$ der hinteren Division nicht verschwindet; dann hat nach Nr. 14 die Gleichung $b \cdot x = b$ eine einzige Wurzel $x = e$. Bedeutet nun a eine beliebige Zahl desselben Systemes und setzt man

$$e \cdot a = y, \quad (19)$$

so findet man gemäss des associativen Gesetzes der Multiplication

$$b \cdot y = b \cdot (e \cdot a) = (b \cdot e) \cdot a,$$

also, da $b \cdot e = b$ ist,

$$b \cdot y = b \cdot a.$$

Diese Gleichung besitzt aber, da $\Delta'(b) \gtrless 0$ ist, ebenfalls nur eine Wurzel, nämlich $y = a$. Demnach ergiebt sich aus (19) $e \cdot a = a$, d. h. es ist die Zahl e ein vorderer Modul der Multiplication.

In derselben Weise zeigt man, dass in einem Systeme mit vorderer Division mindestens ein hinterer Modul der Multiplication vorhanden ist.

Folgesätze. 1) Jedes associative Zahlensystem mit vollständiger (beiderseitiger) Division besitzt mindestens einen vorderen und mindestens einen hinteren Modul.

2) In einem associativen Zahlensysteme, in welchem kein vorderer (hinterer) Modul vorhanden ist, ist die hintere (vordere) Division unzulässig.

Der 2. Folgesatz bildet die directe Umkehrung des 1. Folgesatzes in Nr. 14, falls man den letzteren nur für associative Zahlensysteme ausspricht.

Der 1. Folgesatz kann mit dem 2. Satze von Nr. 14 zu dem folgenden wichtigen Satze vereinigt werden:

---

1) Der Kürze halber bezeichnen wir als associativ ein System von complexen Zahlen, dessen Multiplication dem associativen Gesetze gehorcht.

Satz 2. Jedes associative Zahlensystem mit vollständiger Division besitzt einen einzigen, doppelseitigen Modul der Multiplication.

16. Associative Zahlensysteme mit n Einheiten, die eine vollständige Division zulassen; insbesondere solche, in denen ein Product nur zugleich mit einem Factor verschwinden kann.

Von den Zahlensystemen mit associativer Multiplication wollen wir jetzt behufs näherer Betrachtung diejenigen herausgreifen, welche eine vollständige (sowohl erste als zweite) Division zulassen. Dieselben zeichnen sich, wie aus dem 2. Satze von Nr. 15 im Vereine mit dem 3. Folgesatze von Nr. 14 unmittelbar hervorgeht, vor allen übrigen Zahlensystemen mit associativer Multiplication durch den Besitz eines doppelseitigen Moduls der Multiplication aus. Unsere Voraussetzung, dass das von jetzt an zu betrachtende Zahlensystem eine vollständige Division zulasse, ist daher gleichbedeutend mit der Forderung:

7. Definition. Es sei ein doppelseitiger Modul der Multiplication vorhanden.

Bedeutet e diesen Modul, so befinden sich unter den Zahlen des nun vorliegenden Systemes auch alle Zahlen αe, worin α jede reelle Zahl vorstellen kann. Die Zahlen αe bilden aber auch für sich allein betrachtet ein vollkommen abgeschlossenes Zahlensystem, und zwar gelten für dieselben die nämlichen Rechengesetze, wie für die reellen Zahlen. Sie unterscheiden sich von den letzteren lediglich dadurch, dass die Einheit, statt mit 1, mit e bezeichnet erscheint. Auch den übrigen Zahlen des complexen Zahlensystems gegenüber verhalten sich die Zahlen αe genau so, wie die reellen Zahlen α, indem in den complexen Zahlen und ihren Verknüpfungen jeder reelle Coefficient α durch den ihm entsprechenden Factor αe ersetzt werden kann. Aus diesem Grunde darf man, ohne die Allgemeinheit auch nur im geringsten zu beeinträchtigen, $e = 1$ setzen. Thut man dieses, so braucht man fortan zwischen einem Coefficienten α und einem reellen Factor α keinen Unterschied mehr zu machen, und es kann daher auch der Punkt als Multiplicationszeichen entfallen, d. h. man darf in Hinkunft das Product zweier Zahlen a und b nach Belieben mit $a \cdot b$ oder einfach mit ab bezeichnen.

Wir können auch den nunmehrigen Modul 1 als eine der Einheiten der Basis $e_1, e_2 \cdots e_n$ des complexen Zahlensystems wählen, indem wir etwa $e_n = 1$ setzen. Für $n = 1$ haben wir dann das System der reellen Zahlen in seiner gewöhnlichen Form vor uns.

Nehmen wir von nun an $n > 1$ an, so erscheint jede Zahl a des Systems in der Gestalt

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_{n-1} e_{n-1}. \tag{20}$$

Hierin kann keine von den Einheiten $e_1, e_2 \cdots e_{n-1}$ mehr reell sein, weil jede reelle Zahl α mit der Einheit 1 durch eine lineare Gleichung mit reellen Coefficienten, nämlich $\alpha = \alpha \cdot 1$, verbunden ist, während sämmtliche Einheiten $1, e_1, e_2 \cdots e_{n-1}$ von einander unabhängig sein müssen.

Wir kehren nun wieder zu der Gleichung (18) der vorigen Nummer zurück. Dieselbe können wir nunmehr, indem wir darin noch m durch $m+1$ ersetzen, in der Gestalt

$$x(x^m + \nu_1 x^{m-1} + \cdots + \nu_{m-1}x + \nu_m) = 0 \qquad (1 \leqq m \leqq n) \quad (21)$$

anschreiben. Setzen wir ferner

$$G(x) = x^m + \nu_1 x^{m-1} + \cdots + \nu_{m-1}x + \nu_m,$$

so lässt sich die ganze Function $G(x)$ nach dem Gauss'schen Fundamentalsatze der Algebra für jedes reelle $x = \xi$ in lauter reelle Factoren ersten und zweiten Grades zerlegen, so dass $G(\xi)$ in der Gestalt

$$G(\xi) = \prod_1^k {}_r (\xi - \alpha_r)^{k_r} \prod_1^l {}_r \{(\xi - \beta_r)^2 + \gamma_r^2\}^{\lambda_r} \qquad (22)$$

erscheint, worin

$$\sum_{r=1}^k k_r + 2\sum_{r=1}^l \lambda_r = m \quad \text{und} \quad \gamma_r \gtrless 0$$

ist. Da für die Potenzen der Zahlen x des hier betrachteten Systems gerade so, wie für jene der reellen Zahlen ξ, die Formel (16) der vorigen Nummer besteht, so bleibt die Gleichung (22) auch noch giltig, wenn man in derselben ξ durch x ersetzt, d. h. es ist auch

$$G(x) = \prod_1^k {}_r (x - \alpha_r)^{k_r} \prod_1^l {}_r \{(x - \beta_r)^2 + \gamma_r^2\}^{\lambda_r}.$$

Somit geht die Gleichung (21) über in

$$\left.\begin{array}{c} x\prod_1^k {}_r (x - \alpha_r)^{k_r} \prod_1^l {}_r \{(x - \beta_r)^2 + \gamma_r^2\}^{\lambda_r} = 0 \\ \left(1 \leqq \sum_{r=1}^k k_r + 2\sum_{r=1}^l \lambda_r \leqq n\right). \end{array}\right\} \qquad (23)$$

Um aus dieser Beziehung zwischen den Zahlen x und den reellen Zahlen eine einfachere zu gewinnen, legen wir dem Zahlensysteme noch eine neue, nun aber letzte Schranke auf, indem wir festsetzen:

8. Definition. Es soll das Product zweier Zahlen des Systems dann und nur dann verschwinden, wenn mindestens einer der Factoren Null ist.

Unter dieser Voraussetzung liefert die Relation (23) für jede nicht-reelle Zahl x unseres Zahlensystems eine quadratische Gleichung

$$(x-\beta)^2+\gamma^2=0 \qquad (\gamma \gtrless 0), \tag{24}$$

der man, da $\gamma \gtrless 0$ sein muss, bei anderer Wahl der Buchstaben die Gestalt

$$(\alpha+\beta x)^2=-1$$

verleihen kann, worin jetzt $\beta \gtrless 0$ ist.

Nehmen wir die so gewonnene Gleichung für die nicht-reellen Einheiten $e_1, e_2 \cdots e_{n-1}$ in Anspruch, indem wir

$$(\alpha_r+\beta_r e_r)^2=-1 \qquad (r=1, 2 \cdots n-1) \tag{25}$$

setzen, so lässt sich nach Grissemann[1]) zunächst dadurch eine wesentliche Vereinfachung der Operationen in dem vorliegenden Zahlensysteme herbeiführen, dass man die nicht-reellen Einheiten e_1, $e_2 \cdots e_{n-1}$ durch die Zahlen

$$i_r=\alpha_r+\beta_r e_r \qquad (r=1, 2 \cdots n-1)$$

ersetzt. Eine solche Transformation des Systems ist erlaubt, da die Coefficienten $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n$ sämmtlich von Null verschieden sind.

Für die neuen Einheiten $i_1, i_2 \cdots i_{n-1}$ bestehen zufolge der Gleichungen (25) die Relationen

$$i_r^2=-1 \qquad (r=1, 2 \cdots n-1). \tag{26}$$

Wir haben somit für $n=2$ das System der gemeinen complexen Zahlen vor uns.

Nunmehr nehmen wir $n>2$ an. Dann lassen sich aus der Gleichung (24) für die Einheitsproducte noch weitere wichtige Beziehungen ableiten.

Schreibt man in (24) $x=i_r+i_s$, so erhält man, falls man sich vorläufig r und s als feststehend denkt,

$$\{(i_r+i_s)-\beta\}^2+\gamma^2=0 \qquad (\gamma \gtrless 0) \tag{27}$$

und daraus

$$(i_r+i_s)^2-2\beta(i_r+i_s)+\beta^2+\gamma^2=0. \tag{28}$$

Ebenso hat man für $r \gtrless s$

$$\{(i_r-i_s)-\beta'\}^2+\gamma'^2=0 \qquad (\gamma' \gtrless 0),$$

also

$$(i_r-i_s)^2-2\beta'(i_r-i_s)+\beta'^2+\gamma'^2=0. \tag{29}$$

Andererseits ist zufolge der Gleichungen (26)

$$(i_r+i_s)^2=i_r^2+i_s^2+(i_r i_s+i_s i_r)=-2+(i_r i_s+i_s i_r),$$
$$(i_r-i_s)^2=i_r^2+i_s^2-(i_r i_s+i_s i_r)=-2-(i_r i_s+i_s i_r),$$

---

1) Grissemann a. a. O. S. 138.

also
$$(i_r + i_s)^2 + (i_r - i_s)^2 = -4.$$
Durch Addition von (28) und (29) ergiebt sich unter Berücksichtigung der zuletzt gefundenen Gleichung
$$2(\beta + \beta')i_r + 2(\beta - \beta')i_s = \beta^2 + \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2 - 4.$$
Dieses Resultat besagt, dass, falls $r \gtrless s$ genommen wird, $\beta = \beta' = 0$ und $\gamma^2 + \gamma'^2 = 4$ sein muss. Daraus folgt aber, da sowohl γ als auch γ' von Null verschieden ist, $\gamma^2 < 4$ und $\gamma'^2 < 4$. Demnach nimmt die Gleichung (27) nunmehr die Gestalt an
$$(i_r + i_s)^2 + \gamma^2 = 0 \qquad (r \gtrless s,\ \gamma^2 < 4),$$
und daraus findet man mit Hilfe von (26)
$$i_r i_s + i_s i_r = 2 - \gamma^2 = \delta \qquad (\delta^2 < 4).$$

Denken wir uns nun r und s wieder als beweglich, so entspricht der vorstehenden Gleichung das Gleichungssystem
$$i_r i_s + i_s i_r = \delta_{r,s} \qquad (\delta_{r,s}^2 < 4;\ r \gtrless s;\ r, s = 1, 2 \cdots n-1). \quad (30)$$
Es verdient noch besonders hervorgehoben zu werden, dass diese Relationen (30) für jede Basis $1, i_1, i_2 \cdots i_{n-1}$ bestehen müssen, deren nicht-reellen Einheiten $i_1, i_2 \cdots i_{n-1}$ den Gleichungen (26) genügen.

Für die weitere Untersuchung ersetzen wir die zuletzt gebrauchten Einheiten $i_1, i_2 \cdots i_{n-1}$ durch neue $f_1, f_2 \cdots f_{n-1}$, welche mit jenen durch die Gleichungen
$$f_1 = i_1;\ f_r = \alpha_r i_1 + \beta_r i_r \qquad (r = 2, 3 \cdots n-1)$$
verbunden sein sollen, worin die $2n-4$ Coefficienten $\alpha_r \beta_r$ noch näher zu bestimmen sind. Eine solche Transformation ist gestattet, falls die β_r sämmtlich von Null verschieden sind. Demnach ist im Hinblick auf (26) und (30)
$$f_r^2 = (\alpha_r i_1 + \beta_r i_r)^2 = -(\alpha_r^2 + \beta_r^2) + \alpha_r \beta_r \delta_{1,r},$$
$$f_1 f_r + f_r f_1 = i_1(\alpha_r i_1 + \beta_r i_r) + (\alpha_r i_1 + \beta_r i_r) i_1 = -2\alpha_r + \beta_r \delta_{1,r}.$$
Hierin versuchen wir α_r und β_r so zu bestimmen, dass
$$f_r^2 = -1 \quad \text{und} \quad f_1 f_r + f_r f_1 = 0$$
wird.

Falls $\delta_{1,r} = 0$ ist, werden diese Forderungen erfüllt, indem man $\alpha_r = 0$, $\beta_r = \pm 1$, also $f_r = \pm i_r$ setzt. Ist dagegen $\delta_{1,r} \gtrless 0$, so hat man zur Bestimmung von α_r und β_r die Gleichungen
$$-1 = -(\alpha_r^2 + \beta_r^2) + \alpha_r \beta_r \delta_{1,r} \quad \text{und} \quad 0 = -2\alpha_r + \beta_r \delta_{1,r},$$
woraus sich zunächst
$$\beta_r = \frac{2\alpha_r}{\delta_{1,r}} \quad \text{und} \quad \alpha_r^2\left(1 - \frac{4}{\delta_{1,r}^2}\right) = -1$$

ergiebt. Die letztere dieser beiden Gleichungen ist, da $\delta_{1,r}^2 < 4$ ist, stets nach α_r reell auflösbar, und zwar liefert sie zwei von Null verschiedene, entgegengesetzte Werthe für α_r. Zufolge der ersteren fällt daher auch β_r stets von Null verschieden aus. Es giebt also stets nicht nur eines, sondern 2^{n-1} Systeme von Einheiten $f_1, f_2 \cdots f_{n-1}$, welche die Eigenschaft haben, dass

$$f_r^2 = -1 \qquad (r = 1, 2 \cdots n-1) \tag{31}$$

und

$$f_1 f_r + f_r f_1 = 0 \qquad (r = 2, 3 \cdots n-1) \tag{32}$$

ist. Da hiernach $f_1 f_r = - f_r f_1$ für $r > 1$ ist, so sind wir zu dem wichtigen Satze gelangt:

Ein Zahlensystem mit mehr als zwei Einheiten, das den hier gestellten acht Forderungen entsprechen soll, kann niemals eine commutative Multiplication besitzen. Es giebt daher ausser den beiden Systemen der reellen und der gemeinen complexen Zahlen kein einziges Zahlensystem mehr, in welchem genau dieselben Rechengesetze anwendbar wären, wie für die reellen Zahlen.

Nach Hankel giebt es in einem Zahlensysteme mit mehr als zwei Einheiten, das eine distributive, associative und commutative Multiplication zulässt, selbst dann, wenn die in Nr. 14 mit $\Delta(b)$ bezeichnete Determinante nicht identisch verschwindet und das System daher einen (doppelseitigen) Modul der Multiplication besitzt, noch von Null verschiedene Zahlen, deren Product gleichwohl Null ist.[1]

Diese von Hankel bewiesene Thatsache erscheint nach unserer Darstellung der Systeme complexer Zahlen als eine unmittelbare Folge aus dem vorstehenden Satze. Hätten wir nämlich anstatt der 8. Definition gefordert, dass die Multiplication commutativ sei, so würde in einem solchen Zahlensysteme gemäss des ersten Theiles des obigen Satzes die in der 8. Definition aufgestellte Bedingung unmöglich erfüllt sein können.

Wir betrachten nun zunächst den Fall $n = 3$. Setzen wir demgemäss

$$f_1 f_2 = \xi_0 + \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2,$$

so ist zufolge (31)

$$\begin{aligned} f_1(f_1 f_2) &= \xi_0 f_1 - \xi_1 + \xi_2 f_1 f_2 = \xi_0 f_1 - \xi_1 + \xi_2(\xi_0 + \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2) \\ &= (\xi_0 \xi_2 - \xi_1) + (\xi_0 + \xi_1 \xi_2) f_1 + \xi_2^2 f_2. \end{aligned}$$

---

1) Hankel a. a. O. S. 106. Durch diesen Satz beantwortete Hankel die Frage, deren Lösung Gauss (Werke II, S. 178) versprochen, aber nicht gegeben hat: „warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können“.

Andrerseits hat man, da das associative Gesetz für die Multiplication fortbestehen soll,

$$f_1(f_1 f_2) = (f_1 f_1) f_2 = -f_2.$$

Durch Vergleichung dieser beiden Resultate mit einander ergiebt sich

$$\xi_0 \xi_2 - \xi_1 = 0, \quad \xi_0 + \xi_1 \xi_2 = 0, \quad \xi_2^2 = -1.$$

Von den so gefundenen Gleichungen ist aber mindestens die letzte, d. i. $\xi_2^2 = -1$, unerfüllbar, da das Quadrat einer reellen Zahl ξ_2 nicht negativ sein kann.

Es giebt daher kein Zahlensystem mit drei Einheiten, das die von uns gestellten acht Forderungen erfüllen würde.

Nehmen wir demgemäss jetzt $n > 3$; dann gelten für die Einheitsproducte ausser den Beziehungen (31) und (32) zufolge (30) noch die nachstehenden:

$$f_r f_s + f_s f_r = \delta_{r,s} \qquad (\delta_{r,s}^2 < 4;\ r \gtrless s;\ r, s = 2, 3 \cdots n-1). \quad (33)$$

Um noch einfachere Beziehungen für die Einheitsproducte zu erreichen, transformiren wir das Zahlensystem abermals. Als neue Einheiten wählen wir ausser der reellen Einheit 1 die Zahlen

$$j_1 = f_1; \quad j_2 = f_2; \quad j_r = \alpha_r f_2 + \beta_r f_r \qquad (r = 3, 4 \cdots n-1),$$

worin die Coefficienten α_r und β_r noch näher zu bestimmen sind und zwar so, dass $\beta_r \gtrless 0$ für $r = 3, 4 \cdots n-1$ wird.

Zunächst bemerken wir, dass neben

$$j_1 j_2 + j_2 j_1 = f_1 f_2 + f_2 f_1 = 0$$

zufolge (32) auch

$$\begin{aligned} j_1 j_r + j_r j_1 &= f_1(\alpha_r f_2 + \beta_r f_r) + (\alpha_r f_2 + \beta_r f_r) f_1 \\ &= \alpha_r (f_1 f_2 + f_2 f_1) + \beta_r (f_1 f_r + f_r f_1) = 0 \end{aligned}$$

ist. Ferner findet man mit Rücksicht auf (31) und (33)

$$\left.\begin{aligned} j_r^2 &= (\alpha_r f_2 + \beta_r f_r)^2 = -(\alpha_r^2 + \beta_r^2) + \alpha_r \beta_r \delta_{2,r}, \\ j_2 j_r + j_r j_2 &= f_2(\alpha_r f_2 + \beta_r f_r) + (\alpha_r f_2 + \beta_r f_r) f_2 = -2\alpha_r + \beta_r \delta_{2,r}. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Wir trachten nun die Coefficienten α_r und β_r wieder so zu bestimmen, dass

$$j_r^2 = -1, \quad j_2 j_r + j_r j_2 = 0$$

wird. Für den Fall, dass $\delta_{2,r} = 0$ ist, brauchen wir zu diesem Zwecke zufolge der Gleichungen (34) wieder nur $\alpha_r = 0$, $\beta_r = \pm 1$, also $j_r = \pm f_r$ zu nehmen. Auch falls $\delta_{2,r} \gtrless 0$ ist, ergeben sich zur Bestimmung von α_r und β_r gemäss (34) wieder zwei Gleichungen von genau derselben Gestalt, wie wir sie früher gelegentlich der zweiten Transformation des Zahlensystems erhielten, nämlich

$$\beta_r = \frac{2\alpha_r}{\delta_{2,r}} \quad \text{und} \quad \alpha_r^2 \left(1 - \frac{4}{\delta_{2,r}^2}\right) = -1.$$

Da hier wieder $\delta_{2,r}^2 < 4$ ist, so giebt es sicher Systeme von Einheiten $j_1, j_2 \cdots j_{n-1}$, für welche die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} j_r^2 = -1 & (r = 1, 2 \cdots n-1) \\ j_1 j_r + j_r j_1 = 0 & (r = 2, 3 \cdots n-1) \\ j_2 j_r + j_r j_2 = 0 & (r = 3, 4 \cdots n-1) \end{array}\right\} \quad (35)$$

bestehen.

Es sei nun die Basis $1\ j_1 j_2 \cdots j_{n-1}$ den Relationen (35) entsprechend gewählt; dann ist zufolge eben dieser Relationen und des associativen Gesetzes der Multiplication für $r > 2$

$$\begin{aligned}(j_1 j_2 j_r)^2 &= (j_1 j_2 j_r)(j_1 j_2 j_r) = (j_1 j_2)(j_r j_1)(j_2 j_r) = (j_1 j_2)(j_1 j_r)(j_r j_2) \\ &= (j_1 j_2 j_1)(j_r j_r) j_2 = -(j_1 j_2 j_1) j_2 = -(j_1 j_2)(j_1 j_2) \\ &= (j_1 j_2)(j_2 j_1) = j_1 (j_2 j_2) j_1 = -j_1^2 = 1,\end{aligned}$$

also

$$(j_1 j_2 j_r - 1)(j_1 j_2 j_r + 1) = 0$$

und somit $j_1 j_2 j_r = \mp 1$. Durch Multiplication mit j_r erhält man hieraus $(j_1 j_2 j_r) j_r = \mp j_r$ und, da $(j_1 j_2 j_r) j_r = (j_1 j_2)(j_r j_r) = -j_1 j_2$ ist, schliesslich

$$j_1 j_2 = \pm j_r. \quad (36)$$

Für $n > 4$ ist demnach

$$j_3 = \pm j_4 = \cdots = \pm j_{n-1}.$$

Dieses Resultat steht jedoch im Widerspruche mit der Voraussetzung, dass die Einheiten des Zahlensystems von einander unabhängig seien. Aus diesem Umstande müssen wir schliessen:

Es giebt kein Zahlensystem mit mehr als vier Einheiten, das den hier an dasselbe gestellten acht Forderungen zu genügen imstande wäre.

Nunmehr bleibt nur noch der Fall $n = 4$ zur weiteren Untersuchung übrig.

17. Die Hamilton'schen Quaternionen. Ihre Multiplication.

Für $n = 4$ geht die Formel (36) in

$$j_1 j_2 = \varepsilon j_3 \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

über. Aus dieser Beziehung erhält man durch entsprechende Multiplication der beiden Seiten derselben mit j_2, beziehungsweise j_1 (j_2 ist hinten, j_1 vorne anzusetzen), unter Berücksichtigung des associativen Gesetzes und der Formeln (35) leicht noch

$$j_2 j_3 = \varepsilon j_1 \quad \text{und} \quad j_3 j_1 = \varepsilon j_2.$$

Diese drei Relationen lassen sich stets in

$$j_1 j_2 = j_3; \quad j_2 j_3 = j_1; \quad j_3 j_1 = j_2 \quad (37)$$

umwandeln. Für $\varepsilon = 1$ fallen die ersteren mit den letzteren ohnehin zusammen; im Falle $\varepsilon = -1$ braucht man nur die Einheiten j_1, j_2, j_3

durch $-j_1$, $-j_2$, $-j_3$ zu ersetzen, um für die neuen Einheitsproducte die Beziehungen (37) zu erlangen.

Wir haben es demnach nur noch mit einem einzigen Zahlensysteme mit den vier Einheiten 1, j_1, j_2, j_3 zu thun, das zufolge der Formeln (35) und (37) bei geeigneter Wahl der Einheiten j_1, j_2, j_3 durch die Einheitsproducte

$$\left.\begin{array}{c} j_1^2 = j_2^2 = j_3^2 = -1; \\ j_1 j_2 = -j_2 j_1 = j_3; \quad j_2 j_3 = -j_3 j_2 = j_1; \quad j_3 j_1 = -j_1 j_3 = j_2 \end{array}\right\} \quad (38)$$

charakterisiert ist. Es ist dies das System der Hamilton'schen Quaternionen.[1])

Die vorausgegangene Untersuchung hat nun gezeigt, dass ausser den Systemen der reellen und der gemeinen complexen Zahlen höchstens noch jenes der genannten Quaternionen die von uns gestellten acht Forderungen erfüllen könne. Ob oder dass aber die Quaternionen diesen Forderungen wirklich genügen, das haben wir noch nachzuweisen.

Dabei können die ersten fünf von diesen Forderungen (Def. 1—5) nicht mehr in Betracht kommen, weil durch sie erst die Ausdrücke

$$\alpha_0 + \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \alpha_3 j_3$$

zu Zahlen erhoben und die Grundoperationen für die letzteren erklärt werden.

Bezüglich der 5. Definition ist lediglich noch zu bemerken, dass die Formeln (5) in Nr. 13 nunmehr die besondere Gestalt der Gleichungen (38) angenommen haben.

Auch die siebente Forderung (Def. 7) ist unzweifelhaft erfüllt, da das System der Quaternionen die reelle Einheit 1 enthält.

Um zu sehen, ob die Multiplication der Quaternionen dem associativen Gesetze gehorche, haben wir nur die Producte aus je drei Einheiten daraufhin zu prüfen. Da die Einheit 1 als Factor stets weggelassen werden darf, so handelt es sich dabei nur um die Producte aus je drei Einheiten j_r, j_s, j_t, worin jeder der Zeiger $r\ s\ t$, uuabhängig von den beiden andern, jeden von den Werthen 1, 2, 3 haben kann. Die Formeln (38) ergeben nun ganz allgemein

$$(j_r j_s) j_t = j_r (j_s j_t),$$

wovon man sich durch wirkliche Ausrechnung dieser Einheitsproducte für alle möglichen Werthe von $r\ s\ t$ überzeugt. Zunächst sieht man, dass $(j_r j_r) j_r = -j_r$ und $j_r (j_r j_r) = -j_r$ ist. Ertheilt man den Formeln in der zweiten Zeile von (38) die Gestalt:

---

1) W. R. Hamilton „Lectures on Quaternions" (1853) und „Elements of Quaternions" (1866), letztere in deutscher Uebersetzung herausgegeben von P. Glan, 2 Bde. (1882—1884). Eine übersichtliche Darstellung der Theorie der Quaternionen verdankt man indess erst Hankel (a. a. O. 8. u. 9. Abschnitt).

$$j_r j_s = \varepsilon j_t, \quad j_s j_t = \varepsilon j_r, \quad j_t j_r = \varepsilon j_s \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

wobei jetzt die Nummern $r\ s\ t$ als von einander verschieden anzusehen sind, so findet man

$$\begin{aligned}
&(j_r j_s) j_s = \varepsilon j_t j_s = \varepsilon(-\varepsilon j_r) = -j_r; \quad j_r(j_s j_s) = -j_r, \\
&(j_s j_r) j_s = -\varepsilon j_t j_s = j_r; \quad j_s(j_r j_s) = \varepsilon j_s j_t = j_r \\
&(j_s j_s) j_r = -j_r; \qquad\qquad j_s(j_s j_r) = -\varepsilon j_s j_t = -j_r \\
&(j_r j_s) j_t = \varepsilon j_t j_t = -\varepsilon; \quad j_r(j_s j_t) = \varepsilon j_r j_r = -\varepsilon.
\end{aligned}$$

Die Multiplication der Quaternionen ist demnach associativ.

Die achte Forderung ist an den Quaternionen ebenfalls erfüllt. Dies lässt sich am einfachsten mit Hilfe zweier noch zu erörternden Begriffe zeigen. Schreibt man nämlich

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \alpha_3 j_3,$$

so wird die Zahl $\alpha_0 - \alpha_1 j_1 - \alpha_2 j_2 - \alpha_3 j_3$, d. i. also jene Zahl, die aus a dadurch entsteht, dass man darin die Einheiten j_1, j_2, j_3 durch ihre Gegeneinheiten $-j_1$, $-j_2$, $-j_3$ ersetzt, als die Conjugierte (Ka) und das Product $a \cdot Ka$ als die Norm (Na) von a bezeichnet. Man findet demnach

$$Na = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2. \tag{39}$$

Es ist also die Norm einer jeden von Null verschiedenen Quaternion eine positive reelle Zahl.

Soll nun ein Product $a \cdot b$ verschwinden, d. i. $a \cdot b = 0$ sein, so hat man $a \cdot b \cdot Kb = 0$, also $a \cdot Nb = 0$. Da Nb reell ist, so folgt daraus entweder $a = 0$ oder $Nb = 0$; im letzteren Falle muss auch $b = 0$ sein. Das Product $a \cdot b$ verschwindet somit dann und nur dann, wenn mindestens der eine der Factoren Null ist.

Hiermit sind wir zu dem Satze von Frobenius[1]) gelangt:

Unter den Systemen complexer Zahlen mit mehr als zwei Einheiten erfüllt nur noch das System der Quaternionen die von uns aufgestellten acht Bedingungen.

Das Product zweier Quaternionen ist zufolge der Formeln (38) im allgemeinen nicht commutativ; doch giebt es Fälle, in denen das commutative Gesetz für die Multiplication bestehen bleibt; dies trifft z. B. zu, wenn der eine Factor reell ist, oder wenn die beiden Factoren einander conjugiert sind. Im ersteren Falle ist die Commutativität des Productes selbstverständlich, im letzteren lässt sich dieselbe aus der Gestalt (39) der Norm unmittelbar erkennen. Darnach ist

$$a \cdot Ka = Ka \cdot a = Na. \tag{40}$$

1) Journal f. r. u. ang. Mathematik, 84. Bd. S. 63.

Der reelle Bestandtheil der Zahl a wird nach Hamilton als Scalar (Sa), der nicht-reelle Theil als Vector (Va) von a bezeichnet. Schreibt man demnach

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \alpha_3 j_3,$$

so hat man

$$Sa = \alpha_0, \quad Va = \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \alpha_3 j_3; \quad a = Sa + Va, \quad Ka = Sa - Va.$$

Für $\alpha_0 = 0$ ist $a = Va$, also a selbst ein Vector.

Bezüglich der Vectoren wollen wir die folgenden Sätze erwähnen:

1) Die Conjugierte eines Vectors ist der demselben entgegengesetzte Vector, d. i.

$$K(Va) = -Va. \tag{41}$$

2) Das Quadrat eines (von Null verschiedenen) Vectors ist eine negative reelle Zahl, und zwar absolut genommen gleich der Norm des Vectors.

Der erste dieser Sätze folgt unmittelbar aus dem Begriffe der Conjugierten. Es besteht also die Gleichung (41). Demnach ist

$$N(Va) = Va \cdot K(Va) = -(Va)^2,$$

wodurch im Hinblicke auf die Formel (39) auch der zweite Satz seine volle Bestätigung findet.

3) Bedeuten A und B zwei Vectoren, so hat man

$$S(A \cdot B) = S(B \cdot A) \quad \text{und} \quad V(A \cdot B) = -V(B \cdot A). \tag{42}$$

Ist nämlich

$$A = \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \alpha_3 j_3 \quad \text{und} \quad B = \beta_1 j_1 + \beta_2 j_2 + \beta_3 j_3,$$

so erhält man durch Multiplication von A mit B

$$S(A \cdot B) = -(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3),$$
$$V(A \cdot B) = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) j_3 + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) j_1 + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) j_2.$$

Um $S(B \cdot A)$ und $V(B \cdot A)$ zu bilden, hat man nur in den vorstehenden Ausdrücken die Coordinaten von A mit jenen von B zu vertauschen, wobei die Richtigkeit der Formeln (42) sofort zu Tage tritt.

4) Die Conjugierte des Productes zweier Vectoren ist gleich dem Producte der in umgekehrter Anordnung genommenen Factoren; sind also A, B zwei Vectoren, so hat man

$$K(A \cdot B) = B \cdot A. \tag{43}$$

Beweis: Aus $A \cdot B = S(A \cdot B) + V(A \cdot B)$ findet man

$$K(A \cdot B) = S(A \cdot B) - V(A \cdot B)$$

und hieraus mit Hilfe von (42)

$$K(A \cdot B) = S(B \cdot A) + V(B \cdot A) = B \cdot A.$$

Dieser Satz ist ein besonderer Fall des folgenden:

Die Conjugierte des Productes zweier Quaternionen ist gleich dem Producte der in umgekehrter Anordnung genommenen Conjugierten der beiden Factoren.[1])

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir zur Abkürzung $Sa = \alpha$, $Va = A$ und ebenso $Sb = \beta$, $Vb = B$; dann ist

$$a \cdot b = (\alpha + A)(\beta + B) = \alpha\beta + \beta A + \alpha B + AB.$$

Daraus ergiebt sich zufolge (41) und (43)

$$K(a \cdot b) = \alpha\beta - \beta A - \alpha B + B \cdot A = (\beta - B)(\alpha - A),$$

also

$$K(a \cdot b) = Kb \cdot Ka. \tag{44}$$

Folgerung: $K(a^2) = (Ka)^2$.

Die Formel (44) führt sofort zu dem Satze:

Die Norm eines Productes von Quaternionen ist gleich dem Producte aus den Normen der Factoren.[1]) Nach (44) hat man nämlich

$$N(a \cdot b) = (a \cdot b) \cdot K(a \cdot b) = a \cdot b \cdot Kb \cdot Ka = a \cdot Nb \cdot Ka = a \cdot Ka \cdot Nb$$

und endlich

$$N(a \cdot b) = Na \cdot Nb;$$

Demnach ist auch allgemein

$$N(a_1 \cdot a_2 \cdots a_m) = Na_1 \cdot Na_2 \cdots Na_m. \tag{45}$$

Folgerung: Für $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = a$ erhält man aus (45)

$$N(a^m) = (Na)^m.$$

18. Die beiden Divisionen der Quaternionen.

Die beiden Divisionen, sowohl die erste als auch die zweite, sind stets möglich und eindeutig, wenn nur der Divisor nicht Null ist.

Beweis: Es sei zunächst der Divisor eine reelle Zahl $\beta \gtrless 0$, dann sind wegen der Commutabilität der reellen Factoren bei gleichem Dividend und gleichem Divisor die beiden Quotienten (der vordere und der hintere Quotient) einander gleich; die Gleichung

$$x \cdot \beta = \beta \cdot x = a$$

hat die einzige Wurzel

$$x = \frac{1}{\beta} \cdot a = \frac{\alpha_0}{\beta} + \frac{\alpha_1}{\beta} j_1 + \frac{\alpha_2}{\beta} j_2 + \frac{\alpha_3}{\beta} j_3,$$

welche man einfach mit $\frac{a}{\beta}$ bezeichnen kann. Es ist dann

$$\frac{a}{\beta} \cdot \beta = \beta \cdot \frac{a}{\beta} = a.$$

Die erste Division mit nicht-reellem Divisor b lässt sich auf

1) Hankel a. a. O. S. 144 und 145.

jene mit reellem Divisor zurückführen. Nehmen wir an, die Gleichung $x \cdot b = a$ habe eine Wurzel x; dann haben wir gemäss der Formel (40)

$$x \cdot b \cdot Kb = x \cdot Nb = a \cdot Kb$$

und, weil Nb reell ist,

$$x = \frac{a \cdot Kb}{Nb}.$$

Dieser Werth genügt wirklich der Gleichung $x \cdot b = a$, denn es ist

$$\frac{a \cdot Kb}{Nb} \cdot b = \frac{a \cdot Kb \cdot b}{Nb} = \frac{a \cdot Nb}{Nb} = a.$$

Die erste Division ist also für jeden von Null verschiedenen Divisor möglich und eindeutig. Bezeichnet man den ersten Quotienten von a durch b mit $\frac{a}{b}$, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot Kb}{Nb}.$$

Soll auch die Gleichung $b \cdot x = a$ eine Wurzel x besitzen, so muss

$$Kb \cdot b \cdot x = Nb \cdot x = Kb \cdot a,$$

also

$$x = \frac{Kb \cdot a}{Nb}$$

sein. Bezeichnet man diesen Werth mit $a : b$, so hat man

$$b \cdot (a : b) = b \cdot \frac{Kb \cdot a}{Nb} = \frac{b \cdot Kb \cdot a}{Nb} = \frac{Nb \cdot a}{Nb} = a.$$

Es ist demnach auch die zweite Division möglich und eindeutig, wenn nur der Divisor nicht Null ist.

Auch wenn der Dividend eine reelle Zahl α ist, fallen, weil $\alpha \cdot Kb = Kb \cdot \alpha$ ist, die beiden Quotienten zusammen. Insbesondere ist

$$\frac{1}{b} = 1 : b \left(= \frac{Kb}{Nb}\right).$$

Bezeichnet man diesen Werth mit b^{-1},[1] so hat man

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \qquad a : b = b^{-1} \cdot a.$$

Die Richtigkeit dieser Formeln ist auch unmittelbar zu erkennen, indem man den ersteren Werth für x in die Gleichung $x \cdot b = a$, den letzteren für x in die Gleichung $b \cdot x = a$ einsetzt.

19. Der absolute Betrag (Tensor) einer Quaternion.

Die absolute Quadratwurzel aus der Norm einer Quaternion bezeichnet man als den absoluten Betrag der letzteren. Es ist dies die naturgemässe Verallgemeinerung des gleichnamigen Begriffes bei den gemeinen complexen Zahlen. (Vgl. Nr. 11.) Thatsächlich gelten für die absoluten Beträge der Quaternionen dieselben Sätze, wie sie in Nr. 11 für jene der gemeinen complexen Zahlen gefunden wurden.

1) b^{-1} heisst die reciproke Quaternion zu b. Vgl. Hankel a. a. O. S. 179.

Es wird genügen, hier den ersten und dritten jener Sätze zu beweisen, da die übrigen bis einschliesslich zum Satze 5) aus diesen folgen und bezüglich der Sätze 6) und 7) das in Nr. 11 Vorgetragene, abgesehen davon, dass jetzt selbstverständlich $a = \alpha_0 + \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \alpha_3 j_3$ zu setzen ist, wörtlich zu wiederholen ist.

Der Satz 1) lautet in seiner Anwendung auf Quaternionen:

„Der absolute Betrag der Summe zweier Quaternionen ist nicht grösser als die Summe ihrer absoluten Beträge und nicht kleiner als die Differenz derselben. Wenn von den Summanden

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \alpha_3 j_3, \quad b = \beta_0 + \beta_1 j_1 + \beta_2 j_2 + \beta_3 j_3$$

keiner Null und $|a| \geqq |b|$ ist, so ist dann und nur dann

$$|a + b| = |a| + \varepsilon |b| \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

wenn

$$\beta_r = \omega \alpha_r \qquad (\varepsilon\omega > 0;\ r = 0, 1, 2, 3) \tag{46}$$

ist.“

Beweis: Zunächst hat man

$$|a + b|^2 = \sum_{r=0}^{3} (\alpha_r + \beta_r)^2 = \sum_{r=0}^{3} (\alpha_r^2 + \beta_r^2) + 2 \sum_{r=0}^{3} \alpha_r \beta_r,$$

$$(|a| + \varepsilon |b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\varepsilon |a| \cdot |b| = \sum_{r=0}^{3} (\alpha_r^2 + \beta_r^2) + 2\varepsilon |a| \cdot |b|.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\xi = |a| \cdot |b| \quad \text{und} \quad \eta = \sum_{r=0}^{3} \alpha_r \beta_r, \tag{47}$$

so ergeben die vorstehenden Gleichungen

$$(|a| + \varepsilon |b|)^2 - |a + b|^2 = 2(\varepsilon\xi - \eta) = 2\varepsilon(\xi - \varepsilon\eta). \tag{48}$$

Ferner ist

$$\xi^2 = |a|^2 \cdot |b|^2 = \sum_{r,s=0}^{3} \alpha_r^2 \beta_s^2 \quad \text{und} \quad \eta^2 = \sum_{r,s=0}^{3} \alpha_r \beta_r \alpha_s \beta_s,$$

folglich

$$\xi^2 - \eta^2 = \sum_{r,s=0}^{3} \alpha_r \beta_s (\alpha_r \beta_s - \alpha_s \beta_r)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{r,s=0}^{3} \alpha_r \beta_s (\alpha_r \beta_s - \alpha_s \beta_r) + \sum_{r,s=0}^{3} \alpha_s \beta_r (\alpha_s \beta_r - \alpha_r \beta_s) \right\},$$

also

$$\xi^2 - \eta^2 = \frac{1}{2} \sum_{r,s=0}^{3} (\alpha_r \beta_s - \alpha_s \beta_r)^2. \tag{49}$$

Demnach ist $\xi^2 \geqq \eta^2$ und, da ξ zufolge der ersten der Gleichungen (47) nicht negativ ist, $\xi \geqq \varepsilon\eta$. Nunmehr erhält man aus (48)

$$(|a| - |b|)^2 \leqq |a + b|^2 \leqq (|a| + |b|)^2$$

und hieraus, wenn man $|a| \geqq |b|$ voraussetzt,

$$|a| - |b| \leqq |a + b| \leqq |a| + |b|.$$

In dieser Doppelrelation kommen beide Gleichheitszeichen zugleich zur Geltung, wenn $b = 0$ ist. Ferner ist zufolge (48) dann und nur dann

$$|a + b| = |a| + \varepsilon|b|,$$

wenn $\xi = \varepsilon\eta$ ist. Dazu ist aber nach (49) das Bestehen der Gleichungen

$$\alpha_r\beta_s = \alpha_s\beta_r \qquad (r, s = 0, 1, 2, 3)$$

erforderlich und diese ergeben, wenn wir jetzt $|b| > 0$ und damit auch $|a| > 0$ voraussetzen,

$$\beta_r = \omega\alpha_r \qquad (\omega \gtrless 0;\ r = 0, 1, 2, 3). \tag{50}$$

Gelten nun die Gleichungen (50), so ist $b = \omega a$ und die Gleichungen (47) liefern dann

$$\xi = |\omega| \cdot |a|^2 \quad \text{und} \quad \eta = \omega \cdot |a|^2;$$

es ist daher $\xi = \varepsilon\eta$, wenn $\varepsilon\omega = |\omega|$, also $\varepsilon\omega > 0$ ist, und damit ist der obige Satz bewiesen.

Der Satz 3) in Nr. 11 lautet:

„Der absolute Betrag eines Productes ist gleich dem Producte der absoluten Beträge seiner Factoren."

Die Giltigkeit desselben im Gebiete der Quaternionen ergiebt sich unmittelbar aus der Formel (45). Die genannte Formel ist nämlich gleichbedeutend mit

$$|a_1 \cdot a_2 \cdots a_m|^2 = |a_1|^2 \cdot |a_2|^2 \cdots |a_m|^2;$$

zufolge dieser Gleichung ist aber auch

$$|a_1 \cdot a_2 \cdots a_m| = |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_m|.$$

Uebungen zum X. Abschnitt.

1) Das System der gemeinen complexen Zahlen $\xi + \eta i$ ist vollständig bestimmt durch die Erklärungen 1—5 (Nr. 1—5) und die Einheitsproducte

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad i \cdot i = -1.$$

Man weise mittelst der Coordinaten des Productes

$$a \cdot a' = (\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i) = \alpha\alpha' - \beta\beta' + (\alpha\beta' + \beta\alpha')i$$

das Bestehen des distributiven und associativen Gesetzes für die Multiplication dieser Zahlen, d. i. der Gleichungen $a \cdot (a' + a'') = a \cdot a' + a \cdot a''$, $(a \cdot a') \cdot a'' = a \cdot (a' \cdot a'')$ nach.

2)[1]) Setzt man in die Gleichungen (6) (S. 282) des associativen Gesetzes die Einheitsproducte (1) unter der Annahme, dass $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1$, also $\mu_1 = \mu_1'$, $\mu_2 = \mu_2'$ ist, ein und entwickelt, so erhält man die drei Gleichungen

$$\mu_1 \mu_2 = \lambda_2 \nu_1 \tag{1}$$

$$\mu_2(\lambda_1 - \mu_2) = \lambda_2(\mu_1 - \nu_2) \tag{2}$$

$$\nu_1(\lambda_1 - \mu_2) = \mu_1(\mu_1 - \nu_2). \tag{3}$$

3) Nach Weierstrass sind alle Lösungen der Gleichungen (1)—(3) in den Formeln

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = \alpha\varrho_1 + 2\beta\varrho_2 & \lambda_2 = -\alpha\varrho_2 \\ \mu_1 = \qquad\quad \gamma\varrho_2 & \mu_2 = \alpha\varrho_1 \\ \nu_1 = -\gamma\varrho_1 & \nu_2 = 2\beta\varrho_1 + \gamma\varrho_2 \end{array}\right\} \tag{4}$$

enthalten, wobei die fünf Zahlen α, β, γ, ϱ_1, ϱ_2 ganz willkürlich angenommen werden dürfen.

4) Es ist im I. Hauptfalle (Nr. 6 u. 7) dann und nur dann eine indifferente Zahl e vorhanden, wenn die obigen fünf Zahlen α, β, γ, ϱ_1, ϱ_2 so gewählt werden, dass die quadratische Form $\alpha\varrho_1^2 + 2\beta\varrho_1\varrho_2 + \gamma\varrho_2^2$ einen von 0 verschiedenen Werth ω hat. Und zwar giebt es nur die einzige solche Zahl

$$e = \left(\frac{\varrho_1}{\omega}\right) e_1 + \left(\frac{\varrho_2}{\omega}\right) e_2 .$$

Anleitung. Man führe die Gleichung $e \cdot x = x$ ($e = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2$, $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ setzend) aus und bemerke, dass sie für beliebige Werthe von ξ_1, ξ_2 gelten soll.

5) Man zeige, dass alle Zahlensysteme des I. Hauptfalles, welche keinen Modulus der Multiplication besitzen, wofür demnach neben den Gleichungen (4) noch die Beziehung

$$\alpha\varrho_1^2 + 2\beta\varrho_1\varrho_2 + \gamma\varrho_2^2 = 0$$

besteht, sich auf eine der in Nr. 7 angegebenen Formen zurückführen lassen.

Anleitung. Man führe als neue Einheiten eine noch näher zu bestimmende Zahl

$$i_1 = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 \quad \text{und} \quad i_2 = \varrho_1 e_1 + \varrho_2 e_2$$

ein.

---

1) Eine ähnliche Uebung bietet die am Schlusse von S. 286 erwähnte Entwickelung dar.

6) Man zeige direkt, dass, wenn in einem Zahlensysteme aus zwei Einheiten, welches den Erklärungen 1—5 entspricht und eine associative Multiplication zulässt, eine solche Zahl e vorhanden ist, dass bei beliebigem x $e \cdot x = x$ und eine solche f, dass bei beliebigem x $x \cdot f = x$ ist, alsdann die Multiplication commutativ sein muss. — Beim Beweise kommt in Betracht, dass nach Nr. 8 $\lambda_2 = \nu_1 = 0$ ist.

7) Die Hauptwerthe der Quadratwurzeln aus zwei conjugirten Zahlen sind selbst conjugirt, desgleichen die Nebenwerte derselben.

8) Es ist zu beweisen, dass die Gleichung

$$(\varphi(\xi) =)\ 4\xi^3 - 3\varrho\xi - \alpha = 0, \quad \varrho = \sqrt[3]{\alpha^2 + \beta^2}, \tag{5}$$

auf S. 291 im Falle, dass β nicht Null ist, drei reelle Wurzeln hat. — Da $\varphi(0) = -\alpha$, $\varphi(\pm \varkappa)$ bei genügend grossem positiven $\varkappa$ das Zeichen $\pm$ hat, so hat die Gleichung (5) nach der Algebra eine reelle Wurzel ξ_1 von demselben Zeichen wie α. Die quadratische Gleichung $\varphi(\xi) : (\xi - \xi_1) = 0$ hat aber zwei reelle, von ξ_1 verschiedene Wurzeln, wie sich aus der Formel (17) a. a. O. leicht ergiebt.

9) In dem Systeme von complexen Zahlen mit den Einheiten $e_1, e_2, \cdots, e_n$, deren Producte seien:

$$e_r \cdot e_r = e_r \qquad (r = 1, 2 \cdots n),$$
$$e_r \cdot e_s = 0 \qquad (r \lesseqgtr s;\ r, s = 1, 2 \cdots n),$$

ist die Multiplication eine gewöhnliche, d. i. sie ist distributiv, associativ, commutativ. — Welche Zahl ist ihr Modulus?

10) Ein System von complexen Zahlen mit den n Einheiten $1, f_1, f_2, \cdots f_{n-1}$ in ungerader Anzahl kann, wenn $f_1^2 = -1$ sein soll, unmöglich associativ sein. — Beweis ähnlich wie im Falle $n = 3$ auf S. 308. Man hat nur die Möglichkeit der $n - 2$ Gleichungen

$$(f_1 \cdot f_1) \cdot f_r = f_1 \cdot (f_1 \cdot f_r) \qquad (r = 2, 3 \cdots n - 1)$$

zu prüfen.

11) Wenn für ein System von complexen Zahlen mit den $2k$ Einheiten $e_1 i_1, e_2 i_2, \cdots e_k i_k$ die Einheitsproducte folgendermassen festgesetzt werden:

$$e_r e_r = e_r, \quad e_r i_r = i_r e_r = i_r, \quad i_r i_r = - e_r \qquad (r = 1, 2 \cdots k)$$

und

$$e_r e_s = 0, \quad e_r i_s = i_s e_r = 0, \quad i_r i_s = 0 \quad (r \gtrless s;\ r, s = 1, 2 \cdots k),$$

so ist die Multiplication in demselben distributiv, associativ und commutativ. — Welche Zahl ist der Modulus dieser Multiplication?

NB. Weierstrass hat gezeigt (Werke II, S. 323), dass die complexen Zahlen aus n Einheiten mit gewöhnlicher Multiplication sich auch auf Typen zurückführen lassen, wovon einer das in der 9., ein anderer das in dieser Uebung beschriebene System ist.

Bezeichnen a, b, c von Null verschiedene Quaternionen, so ist

12) $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}, \quad (a : b)^{-1} = b : a.$

13) $$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{b}, \qquad (a : b) \cdot c = ac : b,$$
$$\frac{a}{b} \cdot c = a \cdot (c : b).$$

14) $$\frac{a/b}{c} = \frac{a}{cb}, \qquad (a : b) : c = a : bc.$$

15) $$\frac{c}{a/b} = \frac{cb}{a}, \qquad c : (a : b) = bc : a.$$

16) „Es ist dann und nur dann $a \cdot b = b \cdot a$, wenn $Vb = \omega Va$ ist, wobei ω jede reelle Zahl bedeuten kann. Dabei ist $|Va| > 0$ vorausgesetzt.“ Um den Satz zu beweisen, zerlege man jede der Quaternionen a und b in Scalar und Vector und berücksichtige die Gleichungen (42) S. 313.

XI. Abschnitt.

Geometrische Theorie der gemeinen complexen Zahlen.

1. Die complexen Zahlen wurden auf dem analytischen Wege erfunden. So lange man ihnen keine anschauliche Bedeutung beizulegen vermochte, wurden sie den reellen Zahlen gegenüber als unmögliche Grössen bezeichnet. Es war zweifelhaft, ob sie überhaupt in der Analysis zuzulassen seien. Gauss, dem es 1799 lediglich räthlicher schien die complexen Zahlen beizubehalten als sie zu verwerfen[1]), wurde durch die Theorie der biquadratischen Reste von ihrer Nothwendigkeit überzeugt. So spricht er sich namentlich 1831 in der Anzeige der zweiten Abhandlung über diese Reste aus, wo er auch die geometrische Darstellung der complexen Zahlen auseinandersetzte.[2]) Hierin waren ihm C. Wessel und R. Argand vorangegangen, die 1797 und 1806 die vier Species mit den Strecken der Ebene lehrten.[3]) Mit demselben Gegenstande und insbesondere seinen geometrischen Anwendungen beschäftigte sich seit 1835 O. Bellavitis, welcher der Theorie den Namen „Metodo delle equipollenze“ beilegte.[4]) Auch mehrere Abhandlungen von A. F. Möbius enthalten

---

1) Vgl. Gauss Werke III. p. 6, Note und Baltzer im Journal f. r. u. ang. Math. 94. Bd. S. 87f.

2) Vgl. Gauss Werke II. p. 171f.

3) C. Wessel, Essai sur la représentation analytique de la direction. Mém. de l'an 1797. Uebersetzung aus dem Dänischen. Paris 1897. — R. Argand, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires etc. 2. édit. Paris 1874.

4) Vgl. Hoüel, Sur la méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis in Nouv. Ann. de Math. 2. Sér. T. 8 (1869). Im 12. und 13. Bande der 2. Serie derselben Zeitschrift findet sich eine auch separat erschienene Uebersetzung der Abhandlung von Bellavitis aus dem Jahre 1854: „Sposizione del metodo delle equipollenze“ von Laisant. Diese Schriften sind von uns mehrfach benutzt. — Mancher der von uns vorgeführten Anwendungen der geometrischen Theorie der complexen Zahlen begegnet man auch in der älteren deutschen Literatur über diesen Gegenstand, von der wir H. Scheffler: Ueber das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, Braunschweig 1846; F. Riecke: Die Rechnung mit Richtungszahlen, Stuttgart 1856 erwähnen.

geometrische Anwendungen derselben.[1]) Ferner gehören hierher die beiden ersten Kapitel des 1. Theiles von Hamilton's „Elemente der Quaternionen". Cauchy widmete diesem Gegenstande ebenfalls mehrere Abhandlungen.[2]) Er nannte sogar die complexen Zahlen „quantités géométriques" und ihnen gegenüber die reellen „quantités algébriques". Sein Vorschlag fand indess keinen Anklang; die letztere Bezeichnung würde übrigens nach den heutigen Begriffen nur für einen Theil der reellen Zahlen passen (vgl. S. 155).

Wenn man die Trigonometrie als bekannt voraussetzt, so ist es leicht, die Summe und Differenz, das Product und den Quotienten zweier complexen Zahlen zu construiren. Es entspricht indessen mehr dem Wesen der Sache, dies nicht zu thun, d. h. die Lehre von den Vectoren in der Ebene geometrisch aufzubauen. Man gelangt nämlich dadurch zur Einsicht, dass die Grundformeln der Goniometrie d. i. die Additionstheoreme für den Sinus und Cosinus nichts anderes sind, als die geometrische Deutung der Coordinaten des Productes zweier gemeinen complexen Zahlen.

2. Die Strecken in der Euclid'schen Ebene nach Grösse und Lage (Vectoren).

1. Def. Sind AB die Endpunkte einer geraden Strecke in der gegebenen Ebene, so bedeute nunmehr AB diese Strecke auch der Lage nach und zwar von dem zuerstgenannten Punkte A aus beschrieben. — Die Strecken in diesem Sinne, auch Vectoren genannt, bilden gemäss der folgenden Definition ein Grössensystem, zu welchem noch die uneigentlichen Strecken AA zu rechnen sind.

2. Def. Je zwei uneigentliche Strecken AA, BB sind einander gleich. Zwei eigentliche Strecken AB, $A'B'$ in einer Ebene sind dann und nur dann einander gleich[3]), wenn sie gleich lang sind, in derselben oder in parallelen Geraden liegen und gleichgerichtet sind, d. h. falls AB und $A'B'$ in derselben Geraden sich befinden, so muss der Uebergang von A' zu B' in demselben Sinne stattfinden, wie der von A zu B; falls aber AB, $A'B'$ nicht eine Gerade bilden (Fig. 1), so muss $ABB'A'$ ein Parallelogramm sein und demnach B und B' auf der nämlichen Seite der Geraden AA' liegen. — Die Berechtigung dieser Definitionen steht ausser Zweifel (vgl. I. 2). Insbesondere hat man neben

---

1) Vgl. insbesondere A. F. Möbius: Abhandlungen in den Ber. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. 1852—55 und die zusammenfassende Darstellung derselben in Witzschel's Grundlinien der neueren Geometrie 1858.

2) Exercices d'Analyse etc. T. IV. (1847) p. 157f.

3) Bellavitis nennt solche Strecken äquipollent und drückt ihre Beziehung durch ein eigenes Zeichen aus, was nach I. 3. vermieden werden kann.

$$AB = A'B', \qquad A'B' = A''B''$$

auch $AB = A''B''$. Es sind nämlich, falls $AA'A''$ nicht eine Gerade ist (Fig. 1), die Dreiecke $AA'A''$ und $BB'B''$ einstimmig congruent, so dass AB, $A''B''$ entweder derselben Geraden angehören, gleich lang und gleich gerichtet sind oder $ABB''A''$ ein Parallelogramm ist. Aehnliches gilt, wenn $AA'A''$ und somit auch $BB'B''$ auf einer Geraden liegen.

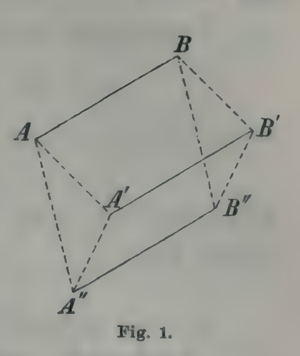


Fig. 1.

3. Def. Die Strecken AB, $A'B'$ heissen einander entgegengesetzt, wenn sie gleich lang, in derselben oder in parallelen Geraden gelegen und entgegengesetzt gerichtet sind d. h. falls AB, $A'B'$ derselben Geraden angehören, so muss der Uebergang von A' zu B' in entgegengesetztem Sinne stattfinden wie von A zu B; falls aber AB, $A'B'$ nicht eine Gerade bilden, so müssen BB' auf entgegengesetzten Seiten der Geraden AA' liegen. Insbesondere sind die Strecken AB und BA einander entgegengesetzt.

Von jedem Punkte der Ebene lässt sich zu jeder nicht in demselben entspringenden Strecke eine und nur eine gleiche und zu jeder Strecke eine und nur eine ihr entgegengesetzte construiren.

Der Kürze wegen werden auch die kleinen deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c} \cdots$ zur Bezeichnung der neuen Grössen AB verwendet werden.

3. Addition und Subtraction der Strecken in der Ebene.

4. Def. „Als Summe von AB und BC gilt die Strecke AC:

$$AB + BC = AC.$$

Unter der Summe $AB + DE$ ist zu verstehen die Strecke AC, deren Endpunkt durch die Construction der Strecke $BC = DE$ gefunden wird (Fig. 2) und jede ihr gleiche."

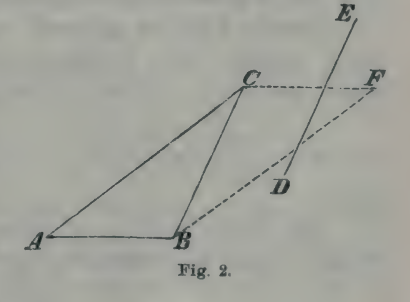


Fig. 2.

Diese Erklärungen werden auch auf den Fall angewendet, dass unter den beiden Addenden uneigentliche Strecken sich befinden oder die Summe eine solche ist. Demnach ist

$$AA + AB = AB + BB = AB,$$

$$AA + BB = AA. \qquad \text{(a)}$$

Die unter sich gleichen uneigentlichen Strecken spielen zufolge dieser Gleichungen die Rolle des Modulus dieser Addition und werden daher

mit 0 bezeichnet, so dass wir an Stelle der Formeln (a) schreiben dürfen

$$0 + AB = AB + 0 = AB, \quad 0 + 0 = 0. \tag{b}$$

Dazu tritt die weitere Formel

$$AB + BA = AA = 0. \tag{c}$$

Ueberhaupt ist, wenn die Strecken AB und DE einander entgegengesetzt sind,

$$AB + DE = 0.$$

Die hier definirte Addition gehorcht denselben Gesetzen, wie die in V. 9 aufgestellte Addition der relativen Strecken in parallelen Geraden. Auf die letztere kommen wir auch hier zurück, wenn die in Betracht gezogenen Strecken sämmtlich in derselben oder in parallelen Geraden liegen. Aber auch in dem allgemeinen Falle findet man leicht:

1) Neben $AB = A'B', \quad DE = D'E'$ ist

$$AB + DE = A'B' + D'E'.$$

Denn um die Summe rechts zu bilden, braucht man nur das Dreieck ABC in Figur 2 so in seiner Ebene zu verschieben, dass seine Seiten sich beziehungsweise parallel bleiben.

2) $$(AB + BC) + CD = AB + (BC + CD);$$

denn links steht

$$AC + CD = AD \quad \text{und rechts} \quad AB + BD = AD.$$

Für drei beliebige Punkte A, B, C der Ebene hat man demnach

$$AB + BC + CA = AB + (BC + CA) = AA = 0. \tag{d}$$

3) $$AB + BC = BC + AB.$$

Denn macht man in Fig. 2 $CF = AB$, so sind die Dreiecke ABC und FCB einstimmig congruent, folglich ist $AC = BF$.

Unsere Addition gehorcht mithin dem associativen und commutativen Gesetze. Als Verallgemeinerung der Formel (d) erscheint der Satz, dass für n beliebige Punkte $A_1, A_2, \cdots A_n$ der Ebene

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n = A_1A_n \quad \text{oder}$$
$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n + A_nA_1 = 0$$

ist.

Die Subtraction ist stets ausführbar und zwar nur in einer Weise. Soll eine Strecke $\mathfrak{x}$ gefunden werden, welche die Gleichung

$$AB + \mathfrak{x} = AC$$

erfüllt, so denke man sich $\mathfrak{x}$ in die Form BX gebracht, wodurch man $AX = AC$ findet. Demnach muss der Punkt X auf C fallen, so

dass $\mathfrak{x} = BC$ ist, welche Strecke in der That der Gleichung genügt. Mithin besteht die Formel

$$AC - AB = BC.$$

Aus den Gleichungen (b) und (c) ergiebt sich, dass insbesondere

$$0 - 0 = 0, \quad AB - 0 = AB, \quad AB - AB = 0,$$
$$0 - AB = BA$$

ist. Die letzte hat zur Bezeichnung $-AB$ für jede AB entgegengesetzte Strecke geführt; demnach schreibt man z. B.

$$BA = -AB.$$

Eine Strecke von einer anderen subtrahiren ist gleichbedeutend damit, zu dieser die jener entgegengesetzte Strecke zu addiren. In der That ist

$$AC - AB = AC + BA = BC.$$

Zufolge des Vorstehenden gelten nach III. 3, 4 dieselben Regeln über die Addition und Subtraction der neuen Grössen wie bei den reellen Zahlen, von den Ungleichungen jedoch vorläufig abgesehen. [Bezüglich derselben vgl. S. 329.]

4. Die Strecken in einer und in parallelen Geraden.

Wie bereits bemerkt, gelten für die Strecken AB in einer und in parallelen Geraden die in V. 9 aufgeführten Gleichungen. Wir verstehen unter mAB, wo m eine natürliche Zahl bedeutet, die Summe

$$\overset{1}{\overbrace{AB}} + \overset{2}{\overbrace{AB}} + \cdots + \overset{m}{\overbrace{AB}},$$

d. i. die in der Art entstehende Strecke, dass man auf der Verlängerung von AB diese Strecke noch $m-1$ Male unmittelbar hintereinander aufträgt. Theilt man die Strecke AB in m gleiche Theile nnd bezeichnet die Theilpunkte von A gegen B fortschreitend mit $A'A'' \cdots A^{(m-1)}$, so bedeutet $\frac{1}{m}AB$ jede Strecke $A^{(r)}A^{(r+1)}$ ($r = 0, 1, \cdots m-1$), wobei $A^{(0)} \equiv A$, $A^{(m)} \equiv B$ ist, d. i. jeden m^{ten} Theil von AB. $\frac{n}{m}AB$ bedeutet die Strecke, welche aus n aufeinanderfolgenden, $\frac{AB}{m}$ gleichen Strecken besteht. Bezeichnet μ eine beliebige rationale Zahl, so versteht man unter μAB die Strecke, welche aus AB und der entgegengesetzten Strecke BA so abzuleiten ist, wie der Coefficient μ aus 1 und -1 entstanden ist. Demnach ist $0AB = 0$.

5. Def. „Allgemein sei αAB (worin die von Null verschiedene, sonst beliebige reelle Zahl α als Coefficient, nicht als Factor zu be-

trachten ist) die Strecke AC, deren Endpunkt C auf AB so gewählt ist, dass das Verhältniss der Strecke AC zu AB in dem VII. 18 erklärten Sinne gleich ist α, und jede AC gleiche Strecke. — Es sei ferner $\alpha 0 = 0$." — Macht man irgend eine der relativen Strecken auf der Geraden AB zur Einheit, so ist das genannte Verhältniss, somit α der Quotient der den Strecken AC und AB entsprechenden reellen Zahlen. Wie wir in Nr. 8 sehen werden, darf α auch als Quotient der neuen Grössen $AC:AB$ bezeichnet werden. Demnach kann man in der Formel

$$\alpha = AC:AB$$

AB, AC sowohl als Verhältnisszahlen nach VII. 18, als auch als Vectoren betrachten. Dabei ist die positive Richtung für die ersteren willkürlich. Da später Formeln mit reellen Streckenzahlen und Vectoren vorkommen werden, worin die einen nicht durch die anderen ersetzt werden können, so wollen wir für die ersteren eine eigene Bezeichnung, nämlich $\overline{AB}$, einführen. Demnach hat man

$$AC = (\overline{AC}:\overline{AB})AB.$$

Nach dem Vorstehenden folgt aus der Gleichung

$$\alpha AB = 0$$

nothwendig $\alpha = 0$. Aus der Gleichung

$$\alpha AB + \alpha' A'B' = 0$$

ergiebt sich, wenn die Strecken AB, $A'B'$ nicht in derselben oder in parallelen Geraden liegen, nothwendig $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$, da die Strecken αAB, $\alpha' A'B'$ unmöglich einander entgegengesetzt sein können.

Man findet ferner ohne Mühe die Relationen:

1) $$\beta(\alpha AB) = (\beta\alpha)AB;$$

2) $$(\alpha + \beta)AB = \alpha AB + \beta AB$$

mit dem besonderen Falle für $\beta = -\alpha$

$$(-\alpha)AB = -\alpha AB;$$

3) $$\alpha(AB + BC) = \alpha AB + \alpha BC.$$

Die erste wird so gezeigt. Sie ist offenbar richtig, wenn eine der beiden Zahlen α, β Null ist. Wenn keine von ihnen Null ist, so sei

$$\alpha = \overline{AC}:\overline{AB}, \quad \beta = \overline{AD}:\overline{AC},$$

so dass nach dem 5. Satze auf S. 176

$$\beta\alpha = \overline{AD}:\overline{AB}$$

ist. Also hat man einerseits

$$\alpha AB = AC, \quad AD = \beta AC = \beta(\alpha AB),$$

andererseits

$$AD = (\beta\alpha) AB.$$

Der 2. Satz ist eine Folge des 4. Satzes auf S. 175. Ist nämlich

$$\alpha = \overline{AC} : \overline{AB}, \quad \beta = \overline{CD} : \overline{AB},$$

so hat man

$$\alpha + \beta = \overline{AD} : \overline{AB},$$

somit

$$AD = (\alpha + \beta) AB.$$

Darin darf man

$$AD = AC + CD = \alpha AB + \beta AB$$

setzen.

Der 3. Satz ergiebt sich daraus, dass wenn man die Strecken

$$\alpha AB = A'B, \quad \alpha BC = BC'$$

construirt, so dass

$$\alpha = \overline{A'B} : \overline{AB} = \overline{BC'} : \overline{BC}$$

ist, auch

$$\overline{A'C'} : \overline{AC} = \alpha$$

sein muss. Liegen nun, wie wir hier annehmen dürfen, die Punkte A, B, C nicht in einer Geraden (Fig. 3), so sind demnach die Dreiecke ABC und $A'BC'$ einstimmig ähnlich; somit ist $AC \parallel A'C'$. Wir dürfen also

$$A'C' = \alpha AC$$

setzen. — Der 2. und 3. Satz lassen sich sofort auf mehrgliedrige Summen ausdehnen.

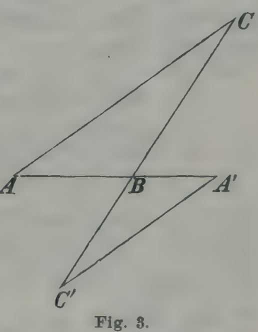
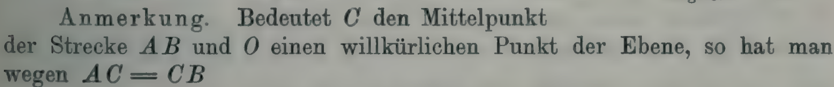


Fig. 3.

Anmerkung. Bedeutet C den Mittelpunkt


der Strecke AB und O einen willkürlichen Punkt der Ebene, so hat man wegen $AC = CB$

$$OC - OA = OB - OC,$$

also

$$OC = \frac{OA + OB}{2}.$$

5. Systematische Darstellung der Strecken der Ebene.

Durch einen gegebenen Punkt O der Ebene kann man zu jeder Strecke AB eine und nur eine ihr gleiche OM ziehen. Legt man durch O (Fig. 4) zwei Gerade, die Axen XX', YY', welche aus einem auf S. 335 zu erwähnenden Grunde auf einander senkrecht stehen sollen, und zieht vom Punkte M zu ihnen die Parallelen MP, MQ, so findet man

$$OM = OP + PM = OP + OQ.$$

In der Axe XX' nimmt man eine von den beiden ihr zugehörigen Richtungen, z. B. OX als die positive an; dann soll in YY' diejenige Richtung die positive sein, welche mit OX den Winkel $+ 90^0$ einschliesst. Betrachtet man die Drehung von rechts nach links, welche dem Gange des Uhrzeigers entgegengesetzt ist, als positiv, so zeigt demnach der Halbstrahl OY die positive Richtung in YY' an. Nehmen wir auf den positiven Axen die festen Punkte E, I an — der Einfachheit wegen gleichweit von O entfernt —, bezeichnen die Strecken OE, OI mit $\mathfrak{e}$ bezw. $\mathfrak{i}$ und führen die rechtwinkligen Coordinaten von M in Bezug auf die Axen XX', YY', die Abscisse

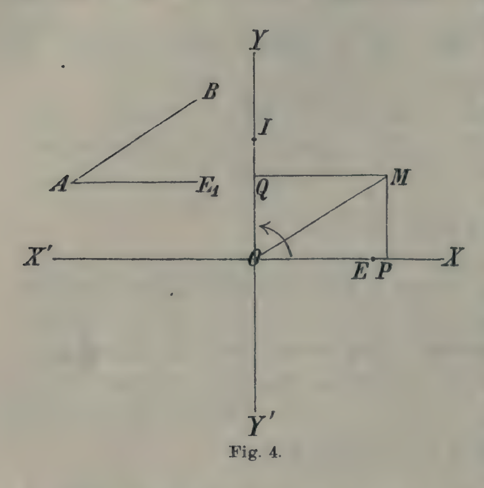


Fig. 4.

$$\overline{OP} : \overline{OE} = \xi \quad \text{und die Ordinate} \quad \overline{OQ} : \overline{OI} = \eta$$

ein, so ergiebt sich nach Nr. 4

$$AB = OM = \xi \mathfrak{e} + \eta \mathfrak{i}.$$

Es lässt sich somit ein jeder Vector OM nebst den ihm gleichen Vectoren AB als eine und dieselbe complexe Grösse mit den zwei Elementen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{i}$ auffassen. Umgekehrt kann man jedem Paare reeller Zahlen ξ, η nach dem 2. Satze auf S. 173 zwei Punkte P, Q auf den Axen, somit einen Vector OM zuordnen. Doch wäre es verfrüht, das Element $\mathfrak{e}$ mit 1, $\mathfrak{i}$ mit i zu bezeichnen; das kann erst geschehen, nachdem nachgewiesen ist, dass die Regeln für das Rechnen mit den Vectoren $\xi \mathfrak{e} + \eta \mathfrak{i}$ die nämlichen sind wie für die gemeinen complexen Zahlen. ξ, η heissen auch die Coordinaten des Vectors OM, ξ die erste, η die zweite.

Die geometrische Addition der Vectoren nach Nr. 3 stimmt nun in der That mit der der complexen Zahlen in X. 2 überein. Denn ist $OM' = \xi' \mathfrak{e} + \eta' \mathfrak{i}$, so finden wir zufolge der in Nr. 3 bewiesenen Additionsregeln

$$OM + OM' = (\xi \mathfrak{e} + \eta \mathfrak{i}) + (\xi' \mathfrak{e} + \eta' \mathfrak{i}) = (\xi \mathfrak{e} + \xi' \mathfrak{c}) + (\eta \mathfrak{i} + \eta' \mathfrak{i}),$$

also nach der Formel 2) auf S. 326

$$OM + OM' = (\xi + \xi') \mathfrak{e} + (\eta + \eta') \mathfrak{i}. \tag{e}$$

Nunmehr lässt sich nach dem in X. 4 angewandten Verfahren von je zwei ungleichen Strecken der Ebene die eine als die grössere, die andere als die kleinere erklären. Die Unterscheidung hängt jedoch von der Wahl der positiven Axenrichtungen ab, so dass bei einer Abänderung derselben die zwischen zwei ungleichen Strecken aufgestellte Relation in ihr Gegentheil übergehen kann. Man bezeichnet nämlich von den Strecken

$$OM = \xi \mathfrak{e} + \eta \mathfrak{i}, \quad OM' = \xi' \mathfrak{e} + \eta' \mathfrak{i}$$

OM' als die grössere oder kleinere, je nachdem die erste von Null verschiedene unter den Differenzen $\xi' - \xi$, $\eta' - \eta$ positiv oder negativ ist. — Durch diese Regel wird zugleich auf jeder Geraden MM' eine positive Richtung festgestellt, so dass die ihr angehörigen Strecken allen in V. 9 gemachten Voraussetzungen entsprechen. Es ist nämlich auf einer nicht zu YY' parallelen Geraden

$$MM' = OM' - OM = (\xi' - \xi)\mathfrak{e} + (\eta' - \eta)\mathfrak{i} \tag{1}$$

grösser als Null oder positiv, wenn $\xi' - \xi > 0$ ist, d. i. die positive Richtung in MM' ist so angenommen, dass die Projection jeder positiven Strecke MM' auf die reelle Axe ebenfalls positiv ist. In allen durch den Nullpunkt gehenden Geraden ausser YY' tritt also die positive Richtung von der Seite der Axe YY', auf welcher sich die Punkte mit negativen Abscissen befinden, auf die Seite derselben, auf welcher sich die Punkte mit positiven Abscissen befinden. Sie geht z. B. in der Geraden OM in Figur 4 von O nach M.

In der Geometrie reicht man mit den folgenden Festsetzungen bezüglich der positiven Richtungen in den Geraden der Ebene aus: 1) In parallelen Geraden lässt man sie nach derselben Seite laufen (S. 119); 2) in jeder Geraden, die auf einer Geraden mit bekannter positiver Richtung a senkrecht steht, wird die positive Richtung in die positive Normale n gelegt, welche wir sogleich erklären werden. Wir haben ohnehin die bereits in V. 9 erwähnten relativen Winkelgrössen näher zu besprechen. Nachdem in jeder Geraden der Ebene eine positive Richtung angenommen ist, führen wir als Winkel $a \widehat{\ } b$ ein den Betrag der Drehung, welche von der Richtung a, d. i. dem Halbstrahle OA (Fig. 5) an in dem für die Ebene nach Belieben festgesetzten positiven Drehungssinne bis zur Richtung b, d. i. dem Halbstrahle OB zurückzulegen ist, angegeben in $^{0}\ '\ ''$ (oder durch die Länge des ihr entsprechenden Bogens vom Kreise, welcher von O aus mit dem Radius 1 beschrieben ist (vgl. S. 343). Gewöhnlich betrachtet man die Drehung von rechts nach links als positiv. Wenn Vielfache von 360^0 bezw. 2π nicht in Betracht kommen, was gewöhnlich der Fall ist, so gilt mit der soeben er-

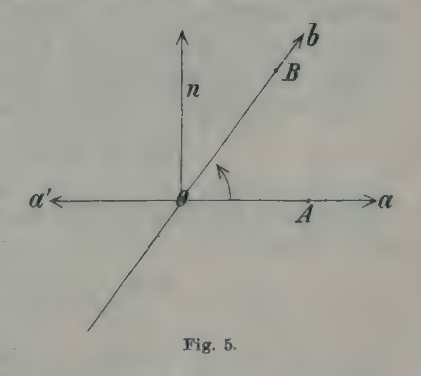


Fig. 5.

haltenen positiven Zahl als gleichbedeutend der mit dem Zeichen — versehene Betrag der Drehung von der Richtung a bis zu b in negativem Sinne. Unter diesen Voraussetzungen hat man

$$b \frown a = - a \frown b \quad \text{oder} \quad a \frown b + b \frown a = 0$$

und für irgend drei Richtungen a, b, c in der Ebene

$$a \frown b = a \frown c + c \frown b.$$

Die von den Alten überkommene Winkelbezeichnung $A\widehat{O}B$ werden wir als gleichbedeutend mit $OA \frown OB$ im obigen Sinne gebrauchen, wobei unter OA, OB die Richtungen von O nach A bezw. von O nach B zu verstehen sind. Gewöhnlich nimmt man den Winkel $A\widehat{O}B$ zwischen -180^0 und $+180^0$. Man hat nun ebenfalls

$$B\widehat{O}A = -A\widehat{O}B \quad \text{oder} \quad A\widehat{O}B + B\widehat{O}A = 0$$

und wenn C einen vierten Punkt der Ebene bezeichnet

$$A\widehat{O}B = A\widehat{O}C + C\widehat{O}B.$$

Als positive Normale zur Richtung a wird die Richtung n bezeichnet, wofür $a \frown n = +90^0$ oder -270^0 ist; wobei zu bemerken ist, dass positive Normale zu n nicht die Richtung a ist, sondern die ihr entgegengesetzte a'.[1])

Häufig ist es zweckmässiger, eine Strecke AB zu charakterisiren durch ihre Polarcoordinaten: die Länge oder den absoluten Betrag (d. i. das Verhältniss der Strecke AB zu OE, beide im absoluten Sinne genommen), welcher mit $|AB|$ (oder falls die Längeneinheit unbestimmt bleibt, mit $|AB|:|OE|$) bezeichnet wird, und die Neigung (Anomalie) $E_1\widehat{A}B$, wo $AE_1 = OE$ gemacht ist (Fig. 4). Dieser Winkel ist gemäss der oben festgesetzten positiven Drehungsrichtung abzulesen. Für gleiche Strecken haben diese Coordinaten die nämlichen Werthe. Für die Strecke OM ist der absolute Betrag zufolge des pythagoräischen Satzes (der in Nr. 6 selbst durch eine Streckenrechnung bewiesen werden wird)

$$|OM| = |OM| : |OE| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

die Neigung der Winkel $E\widehat{O}M$. Für die Strecke MM' hat man demnach zufolge (1)

$$|MM'| = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}.$$

---

1) Diejenige Halbebene, in welche die positive Normale einer gegebenen Richtung fällt, heisst die positive Seite dieser Richtung. Die positive Seite der Richtung XX' in Fig. 4 wird demnach durch den Halbstrahl OY, die der Richtung YY' durch den Halbstrahl OX', welcher die negativen Abscissen enthält, bezeichnet.

Construirt man (Fig. 6) mittelst der Strecke $MN = OM'$ die Summe

$$ON = OM + OM' = (\xi + \xi')\mathfrak{e} + (\eta + \eta')\mathfrak{i},$$

so erkennt man unmittelbar die Richtigkeit der Sätze über den absoluten Betrag eines Binoms in X. 11; denn in dem Dreiecke OMN ist die Seite ON kleiner als die Summe der beiden anderen und grösser als ihre Differenz.

Zwei Strecken MM' und $M_1 M_1'$ von gleicher Länge und entgegengesetzter Neigung heissen nach Cauchy[1]) zu einander conjugirt. Man gebraucht für $M_1 M_1'$ die Bezeichnungen $K(MM')$ oder conj. MM', so dass

$$\text{conj. } M_1 M_1' = MM'.$$

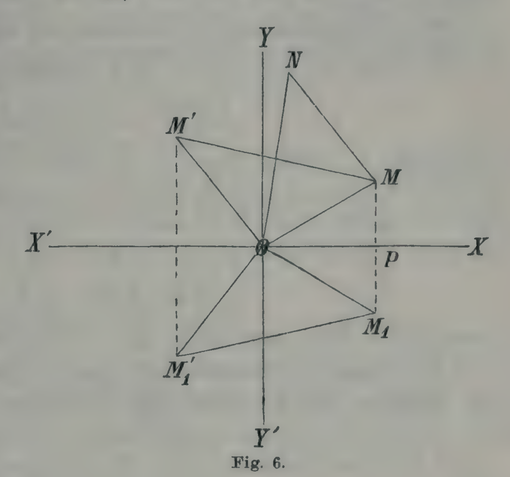


Fig. 6.

Zwei conjugirte Strecken können stets in eine solche Lage gebracht werden, dass sie zur reellen Axe symmetrisch sind, wie MM' und $M_1 M_1'$ in Figur 6. Dann sind auch OM und OM_1, sowie OM' und OM_1' zu einander conjugirt und man hat wegen

$$OM_1 = \xi\mathfrak{e} + (-\eta)\mathfrak{i} = \xi\mathfrak{e} - \eta\mathfrak{i}, \quad OM_1' = \xi'\mathfrak{e} - \eta'\mathfrak{i}$$

$$M_1 M_1' = (\xi' - \xi)\mathfrak{e} - (\eta' - \eta)\mathfrak{i}.$$

Vergleicht man diese Formel mit (1), so sieht man, dass conjugirte Strecken gleiche reelle und entgegengesetzte imaginäre Coordinaten haben. Eine zur reellen Axe parallele Strecke ist zu sich selbst conjugirt. — Die Summe zweier conjugirten Strecken ist reell:

$$MM' + \text{conj. } MM' = [2(\xi' - \xi)]\mathfrak{e}.$$

Anmerkung. Wenn n Punkte $M_1, M_2, \cdots M_n$ mit den Coordinaten $\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \cdots \xi_n\eta_n$ gegeben sind, so sind bekanntlich die Coordinaten ihres Schwerpunktes G

$$\frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n), \quad \frac{1}{n}(\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n).$$

Man hat somit für denselben

$$OG = \frac{1}{n}(OM_1 + OM_2 + \cdots + OM_n),$$

---

1) Cours d'Analyse p. 180.

woraus, wenn OM_1 durch $OG + GM_1$, $\cdots$ GM_n durch $OG + GM_n$ ersetzt wird, sich ergiebt

$$0 = GM_1 + GM_2 + \cdots + GM_n.$$

6. Multiplication der Strecken in der Ebene.

6. Def. 1) „Zunächst wird festgesetzt

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot 0 = 0,$$

$$\mathfrak{a} \cdot \alpha\mathfrak{e} = \alpha\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{a} = \alpha\mathfrak{a}."$$

Ist

$$\mathfrak{a} = AB, \quad \alpha = \overline{OP} : \overline{OE},$$

so wird die Grösse $\alpha\mathfrak{a} = AR$ auf AB mittelst der Proportion

$$\overline{AR} : \overline{AB} = \overline{OP} : \overline{OE}$$

construirt. Wie man sieht, ist $\mathfrak{e}$ Modulus der Multiplication.

2) Wenn die Strecke CD (Fig. 7) nicht der reellen Axe parallel ist, so wird das Product $AB \cdot CD$ durch die folgende Construction gefunden. „Zieht man von C eine Strecke $CE_1 = \mathfrak{e}$ und construirt das dem Dreiecke CE_1D einstimmig ähnliche ($\underset{\sim}{\perp}$) ABP, so sei die Strecke AP (und jede ihr gleiche) das Product $AB \cdot CD$."

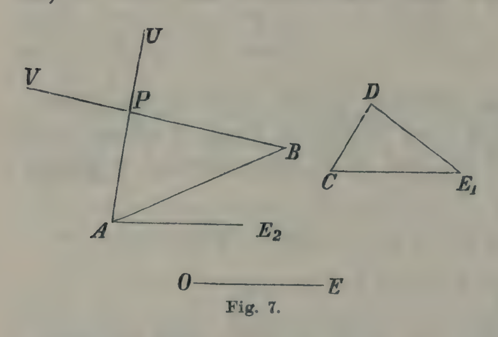


Fig. 7.

Wegen der einstimmigen Aehnlichkeit der genannten Dreiecke müssen nicht allein die absoluten Längen jedes Paares homologer Seiten derselben das nämliche Verhältniss haben, sondern auch ihre homologen Winkel auch dem Sinne nach (vgl. Nr. 5) einander gleich sein:

$$E_1\widehat{C}D = B\widehat{A}P, \quad C\widehat{D}E_1 = A\widehat{P}B, \quad D\widehat{E_1}C = P\widehat{B}A.$$

Um den Punkt P zu erhalten, construirt man demnach

$$B\widehat{A}U = E_1\widehat{C}D, \quad A\widehat{B}V = C\widehat{E_1}D.$$

In Figur 7 sind die beiden ersteren Winkel positiv, die beiden letzteren negativ. P ist der Schnittpunkt der beiden Schenkel AU und BV. Somit ist der Punkt P vollständig bestimmt. Aus der vorstehenden Regel folgt unmittelbar, dass

$$|AP| = |AB|\,|CD| \tag{2}$$

und dass, wenn man $AE_2 = \mathfrak{e}$ macht,

$$E_2\widehat{A}P = E_2\widehat{A}B + B\widehat{A}P = E_2\widehat{A}B + E_1\widehat{C}D \qquad (3)$$

ist. Der absolute Betrag des Productes ist das Product der absoluten Beträge der Factoren, die Neigung desselben die Summe ihrer Neigungen. Dieser Satz passt auch auf den Fall, dass der Multiplicator reell ist; man hat nur, je nachdem α in $\alpha\mathfrak{e}$ positiv oder negativ, dafür die Neigung Null oder 180^0 anzusetzen. — Conjugirte Strecken liefern ein reelles Product:

$$AB \cdot \text{conj.}\, AB = |AB|^2\mathfrak{e}.$$

Zunächst ist zu zeigen, dass die soeben erklärte Verknüpfung der Strecken, deren Ergebniss von der Wahl der Strecke $\mathfrak{e}$ abhängt, als eine Multiplication bezeichnet werden darf. Vor Allem bemerke man, dass neben

$$AB = A'B', \quad CD = C'D'$$
$$AB \cdot CD = A'B' \cdot C'D'$$

ist. Es kommt dies darauf hinaus, die Dreiecke CE_1D und ABP in ihrer Ebene so zu verschieben, dass jede von ihren Seiten sich selbst parallel bleibt. Zufolge dieses Satzes brauchen wir nur Producte von Strecken zu betrachten, die in O entspringen. Es ist

$$OM \cdot OM' = OK,$$

wenn

$$\triangle\, OEM' \cong OMK$$

ist, wobei sich nach (2) und (3) ergiebt

$$|OK| = |OM|\,|OM'|, \quad E\widehat{O}K = E\widehat{O}M + E\widehat{O}M'. \qquad (4)$$

Dass unsere Multiplication dem associativen und commutativen Gesetze gehorcht, folgt aus den Gleichungen

$$(OM \cdot OM') \cdot OM'' = OM \cdot (OM' \cdot OM''),$$
$$OM \cdot OM' = OM' \cdot OM,$$

deren beide Seiten in der That nach der Formel (4) von dem nämlichen absoluten Betrage und der nämlichen Neigung sind.

Mehr Umstände macht der Nachweis des distributiven Gesetzes. Da das commutative Gesetz bereits erwiesen ist, so genügt es, eine Seite des distributiven, und zwar für den Fall, dass alle Strecken im Punkte O entspringen, zu zeigen, also etwa die Formel

$$(OM + OM') \cdot OA = OM \cdot OA + OM' \cdot OA \qquad (5)$$

zu begründen.[1])

Wir bemerken zunächst, dass wenn man sich in der Gleichung

$$OK = OM \cdot OA \qquad (6)$$

1) Uebersichtliche Formulirung des von Hankel (a. a. O. S. 79) gegebenen Beweises.

den Punkt M als beliebig in der Ebene XOY veränderlich vorstellt, die Punkte K eine einstimmig ähnliche Abbildung der genannten Ebene auf sich selbst liefern, d. h. sind K, K', K'' die drei gegebenen Punkten M, M', M'' vermöge der Beziehung (6) entsprechenden, so ist das Dreieck

$$KK'K'' \pm\!\!\!\!\sim MM'M''.$$

Aus der Gleichung (6) und der ähnlichen

$$OK' = OM' \cdot OA \tag{7}$$

ergeben sich zunächst nach (4) die Formeln

$$|OK| = |OM| \cdot |OA|, \qquad |OK'| = |OM'| \cdot |OA|$$

$$E\widehat{O}K = E\widehat{O}M + E\widehat{O}A, \quad E\widehat{O}K' = E\widehat{O}M' + E\widehat{O}A.$$

Daraus folgt, dass

$$|OK| : |OK'| = |OM| : |OM'|$$

$$K\widehat{O}K' = E\widehat{O}K' - E\widehat{O}K = E\widehat{O}M' - E\widehat{O}M = M\widehat{O}M'$$

ist. Somit sind die Dreiecke KOK' und MOM' einstimmig ähnlich (Fig. 8). Auf die nämliche Weise beweist man, dass wenn weiter $OK'' = OM'' \cdot OA$ ist

$$\triangle K'OK'' \pm\!\!\!\!\sim M'OM'',$$

$$\triangle K''OK \pm\!\!\!\!\sim M''OM$$

ist. Hieraus ergiebt sich dann, dass die homologen Winkel in den Dreiecken $KK'K''$ und $MM'M''$ einander gleich sind. Wir haben z. B.

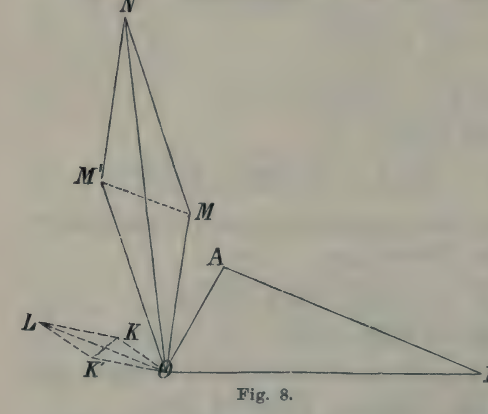


Fig. 8.

$$K\widehat{K'}K'' = K\widehat{K'}O + O\widehat{K'}K'' = M\widehat{M'}O + O\widehat{M'}M'' = M\widehat{M'}M''.$$

Mithin sind die zuletzt genannten Dreiecke in der That einstimmig ähnlich.

Nun sei (Fig. 8)

$$ON = OM + OM' \quad \text{und} \quad OL = ON \cdot OA. \tag{8}$$

Alsdann ist

$$\triangle KK'L \pm\!\!\!\!\sim MM'N. \tag{9}$$

Zieht man noch die Geraden NM' und LK', so ist nicht allein das Viereck $OMNM'$, sondern auch das Viereck $OKLK'$ ein Parallelo-

gramm. Wir können nämlich zeigen, dass sowohl $OK \parallel K'L$, als auch $OK' \parallel KL$ ist, denn es ist

$$O\widehat{K}K' = O\widehat{M}M' = N\widehat{M}'M$$

und zufolge der Aehnlichkeit der Dreiecke (9)

$$N\widehat{M}'M = L\widehat{K}'K, \quad \text{also} \quad O\widehat{K}K' = L\widehat{K}'K.$$

Und ebenso ist

$$O\widehat{K}'K = O\widehat{M}'M = N\widehat{M}M' = L\widehat{K}K'.$$

Da also das Viereck $OKLK'$ ein Parallelogramm ist, so ist $OL = OK + OK'$. Daraus ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (8), (6) und (7) endlich die Formel (5).

Auf (5) führen wir zurück die Formel

$$(OM - OM') \cdot OM'' = OM \cdot OM'' - OM' \cdot OM''$$

mittelst der Relation

$$(-OM') \cdot OM'' = -OM' \cdot OM'',$$

welche einen besonderen Fall des unmittelbar aus den Formeln (4) folgenden Satzes

$$(\alpha OM) \cdot (\alpha' OM') = (\alpha\alpha')(OM \cdot OM') \tag{10}$$

bildet. Es ist nämlich $|\alpha OM| = |\alpha||OM|$ u. s. w. und je nachdem α, α' gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, ist die Neigung der Strecken auf beiden Seiten von (10) in der That

$$E\widehat{O}M + E\widehat{O}M' \quad \text{oder} \quad E\widehat{O}M + E\widehat{O}M' + 180^0.$$

Mit Hilfe des distributiven Gesetzes und der Formel (10) können wir die Coordinaten des Productes $OM \cdot OM'$ ermitteln, wenn nur die des Productes $\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i}$ bekannt sind. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} OM \cdot OM' = (\xi\mathfrak{e} + \eta\mathfrak{i}) \cdot (\xi'\mathfrak{e} + \eta'\mathfrak{i}) &= (\xi\xi')(\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e}) \\ &+ (\xi\eta')(\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{i}) + (\eta\xi')(\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{e}) + (\eta\eta')(\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i}) \\ &= (\xi\xi')\mathfrak{e} + (\xi\eta' + \eta\xi')\mathfrak{i} + (\eta\eta')(\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i}). \end{aligned}$$

Nun sind, weil die Strecken $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{i}$ gleich lang und aufeinander senkrecht sind[1]), die Dreiecke OEI und OIE' in Fig. 9 ($OE' = -\mathfrak{e}$) einstimmig ähnlich. Folglich hat man

---

1) Wenn die gleichlangen Strecken $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{i}$ den Winkel ω einschliessen, wenn also

$$X\widehat{O}Y = E\widehat{O}I = \omega$$

ist, wobei die positive Drehungsrichtung in der Constructionsebene als gegeben vorausgesetzt ist, so hat man

$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} = -\mathfrak{e} + (2\cos\omega)\mathfrak{i}.$$

$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} = - \mathfrak{e},$$

so dass man schliesslich

$$(\xi \mathfrak{e} + \eta \mathfrak{i}) \cdot (\xi' \mathfrak{e} + \eta' \mathfrak{i}) = (\xi\xi' - \eta\eta') \mathfrak{e} + (\xi\eta' + \eta\xi') \mathfrak{i} \qquad (11)$$

erhält. — Als Product der conjugirten Strecken (Fig. 6)

$$OM = \xi \mathfrak{e} + \eta \mathfrak{i}, \quad OM_1 = \xi \mathfrak{e} - \eta \mathfrak{i}$$

findet man

$$OM \cdot OM_1 = (\xi \mathfrak{e})^2 - (\eta \mathfrak{i})^2 = (\xi^2 + \eta^2) \mathfrak{e},$$

aus welcher Formel der Pythagoräische Satz abgeleitet werden kann. Denn da, wie oben bemerkt,

$$OM \cdot OM_1 = |OM|^2 \mathfrak{e}$$

ist, so hat man

$$|OM|^2 = \xi^2 + \eta^2 = |OP|^2 + |PM|^2.$$

Associirt zu einer gegebenen Strecke

$$OM = \xi \mathfrak{e} + \eta \mathfrak{i}$$

heissen nach Gauss[1]) die drei Strecken, welche aus OM nach einander durch dreimalige Multiplication mit $\mathfrak{i}$ hervorgehen. Man erhält dafür (Fig. 9)

$$\begin{aligned}
OM_1 &= OM \cdot \mathfrak{i} = - \eta \mathfrak{e} + \xi \mathfrak{i} \\
OM_2 &= OM_1 \cdot \mathfrak{i} = OM \cdot (-\mathfrak{e}) = - \xi \mathfrak{e} - \eta \mathfrak{i} \\
OM_3 &= OM_2 \cdot \mathfrak{i} = OM_1 \cdot (-\mathfrak{e}) = OM \cdot (-\mathfrak{i}) = \eta \mathfrak{e} - \xi \mathfrak{i}.
\end{aligned}$$

$OM_3 \cdot \mathfrak{i}$ fällt wieder mit OM zusammen u. s. w. OM_2 ist die entgegengesetzte Strecke zu OM. M_1 und M_3 liegen auf dem in O zu OM lothrechten Strahle und zwar so, dass

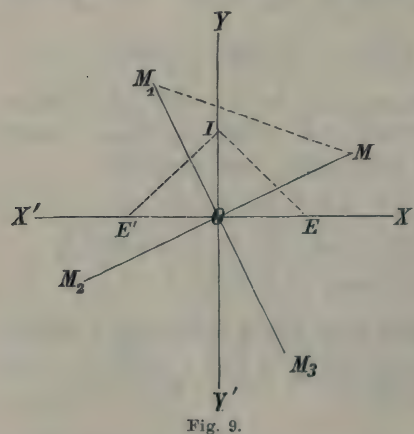


Fig. 9.

$$M\widehat{O}M_1 = + 90^0, \quad M\widehat{O}M_3 = - 90^0.$$

Die Endpunkte der vier zu einander associirten Strecken OM, OM_1, OM_2, OM_3 sind von O gleich weit entfernt. — Mit Hilfe derselben lässt sich die Formel (11) auch durch die folgende Definition einführen: Eine Strecke OM mit einer anderen OM' multipliciren heisst aus ihr und den ihr associirten Strecken eine Strecke so ableiten, wie der Multiplicator OM' aus der Fundamentalstrecke $\mathfrak{e}$ und den ihr associirten $\mathfrak{i}$, $-\mathfrak{e}$, $-\mathfrak{i}$ entstanden ist. In der That hat man z. B. wenn ξ', η' positiv sind,

$$OM \cdot OM' = \xi' OM + \eta' OM_1 = (\xi\xi' - \eta\eta') \mathfrak{e} + (\xi\eta' + \eta\xi') \mathfrak{i}.$$

1) Gauss' Werke II. p. 103.

7. Darstellung der gemeinen complexen Zahlen durch die Vectoren in der Ebene.

Nachdem wir in der vorigen Nummer nachgewiesen haben, dass die Multiplication der Vectoren $\xi\mathfrak{e} + \eta\mathfrak{i}$ nach denselben Gesetzen vor sich geht, wie die der gemeinen complexen Zahlen, dass die Strecke $\mathfrak{e}$ hierbei die Rolle des Modulus übernimmt und dass $\mathfrak{i}\mathfrak{i} = -\mathfrak{e}$ ist, dürfen wir den Fundamentalgrössen $\mathfrak{e} = OE$, $\mathfrak{i} = OI$ bezw. die Zahlen 1, i zuordnen. Ordnet man ferner jeder Strecke OA der Axe XX', welche zu OE ein rationales Verhältniss α hat, die Zahl α zu, so entspricht nach VII. 18 jeder Strecke OP von XX' eine reelle Zahl ξ, welche das Verhältniss $\overline{OP} : \overline{OE}$ heisst. Ordnet man endlich einer jeden Strecke OB der Axe YY', welche zu OI ein rationales Verhältniss β hat, die Zahl βi zu, so entspricht aus demselben Grunde der beliebigen Strecke OQ von YY' die Zahl ηi, worin η eine reelle Zahl, nämlich das Verhältniss $\overline{OQ} : \overline{OI}$ bedeutet. Ist nun M ein beliebiger Punkt der Ebene (Fig. 4 S. 328) und zieht man von ihm die Parallelen MP, MQ zu den Axen, so entspricht demnach der Strecke OM die complexe Zahl $\xi + \eta i$, worin ξ die Abscisse $\overline{OP} : \overline{OE}$, η die Ordinate $\overline{OQ} : \overline{OI}$ des Punktes M bedeutet. Man nennt die Zahl $\xi + \eta i$ das Verhältniss des Vectors OM zur Strecke OE und bezeichnet sie mit $OM : OE$, wobei man jedoch nicht an den erst in der nächsten Nummer auftretenden Quotienten $OM : OE$ denken darf. In der gleichfalls üblichen Formel

$$OM = (\xi + \eta i)\, OE$$

erscheint die Zahl $\xi + \eta i$ als Coefficient, nicht etwa als Factor. Betrachtet man die Einheitsstrecke OE als ein für alle Male festgesetzt, so setzt man einfach

$$\mathfrak{e} = 1, \quad \mathfrak{i} = i, \quad OM = \xi + \eta i.$$

Umgekehrt entspricht nunmehr jeder complexen Zahl $\xi + \eta i$ ein Vector OM in der Ebene XOY, indem nach VII. 18 jeder reellen Zahl ξ ein Punkt P der Axe XX' und jeder reellen Zahl η ein Punkt Q der Axe YY' zugeordnet werden kann. — Aus den Formeln (e) S. 328 und (11) ist ersichtlich, dass die der Summe und die dem Producte zweier Vectoren entsprechende Zahl die Summe bezw. das Product der Zahlen dieser Vectoren ist.

Hierbei stellt sich die Frage ein, wie sich die Verhältnisszahl des Vectors OM ändert, wenn wir die Fundamentaleinheit OE durch eine andere Strecke OE_1 ersetzen. Es sei in Bezug auf die Fundamentalstrecken $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{i}$

$$OM = \xi\mathfrak{e} + \eta\mathfrak{i}, \quad OE_1 = \alpha\mathfrak{e} + \beta\mathfrak{i}.$$

Zur Strecke OE_1 gehört als zweite Fundamentalstrecke

$$OI_1 = OE_1 \cdot \mathfrak{i} = -\beta\mathfrak{e} + \alpha\mathfrak{i},$$

indem der Punkt I_1 auf der positiven Normalen OY_1 zu OE_1 liegt und zwar in gleichem Abstande von O wie der Punkt E_1.

Ist nun

$$OM = \xi_1(OE_1) + \eta_1(OI_1),$$

so haben wir

$$OM = \xi_1(\alpha \mathfrak{e} + \beta \mathfrak{i}) + \eta_1(-\beta \mathfrak{e} + \alpha \mathfrak{i}) = (\xi_1\alpha - \eta_1\beta)\mathfrak{e} + (\xi_1\beta + \eta_1\alpha)\mathfrak{i}.$$

Also ist

$$\xi = \xi_1\alpha - \eta_1\beta, \quad \eta = \xi_1\beta + \eta_1\alpha$$

und daher

$$\xi + \eta i = (\xi_1 + \eta_1 i)(\alpha + \beta i).$$

Wir finden somit

$$\xi_1 + \eta_1 i = \frac{\xi + \eta i}{\alpha + \beta i},$$

d. h. das Verhältniss von OM zu OE_1 ist der Quotient: das Verhältniss $OM : OE$ dividirt durch das Verhältniss $OE_1 : OE$.

8. Division der Strecken in der Ebene.

Der Quotient der beliebigen Strecke $\mathfrak{a}$ durch die reelle $\xi\mathfrak{e}$ ist $(1:\xi)\mathfrak{a}$. $\mathfrak{a} : 0$ ist unmöglich, $0 : 0$ wegen seiner Vieldeutigkeit unzulässig. Bei der Ermittelung einer Strecke AQ, deren Product mit einer nicht zur reellen Axe parallelen Strecke AC gleich einer gegebenen AB sein soll, können wir uns auf den Fall beschränken, dass die letztere Strecke ebenfalls vom Punkte A ausgeht. Denn ist $AQ \cdot AC = AB$ und $A'C' = AC$, so hat man auch $AQ \cdot A'C' = AB$. Soll nun $AQ \cdot AC = AB$ sein, so mache man (Fig. 10) $AE_1 = \mathfrak{e}$ und construire das mit dem Dreiecke AE_1C einstimmig ähnliche AQB. Construirt man

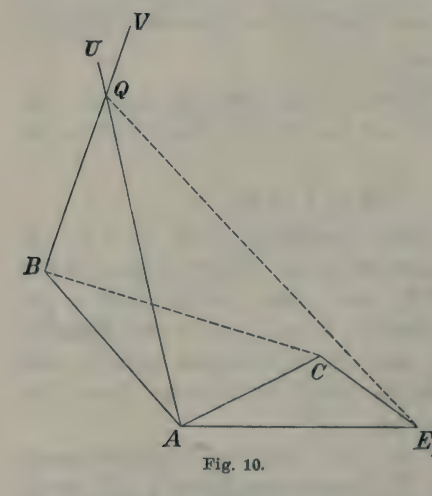


Fig. 10.

$$B\widehat{A}U = C\widehat{A}E_1, \quad A\widehat{B}V = A\widehat{C}E_1,$$

so ist der gesuchte Punkt Q der Schnittpunkt der Halbstrahlen AU und BV.

Bilden die Punkte ABC eine Gerade, so fällt Q in die Gerade AE_1 und zwar ist $BQ \parallel CE_1$, also

$$AB : AC = (\overline{AB} : \overline{AC})\mathfrak{e}. \tag{12}$$

Aus der vorstehenden Construction ergiebt sich, dass auch

$$\triangle CAB \stackrel{+}{\sim} E_1AQ$$

ist. Dies folgt auch daraus, dass wenn

$$AQ \cdot AC = AB$$

ist, nach den Formeln (4) auf S. 333

$$|AQ| \cdot |AC| = |AB|, \quad E_1\widehat{A}Q + E_1\widehat{A}C = E_1\widehat{A}B,$$

folglich

$$|AQ| = |AB| : |AC|, \quad E_1\widehat{A}Q = E_1\widehat{A}B - E_1\widehat{A}C = C\widehat{A}B \tag{13}$$

ist. Wir entnehmen ferner aus (13) den Satz: „Der absolute Betrag des Quotienten ist gleich dem Quotienten: absoluter Betrag des Dividends durch den des Divisors, die Neigung desselben ist gleich der Differenz: Neigung des Dividends weniger der des Divisors.“

Wenn AB auf AC senkrecht steht, so ist $C\widehat{A}B = +90^0$ oder -90^0, je nachdem B auf der positiven oder negativen Normale zur Strecke AC in A liegt. Zufolge der 2. Gleichung (13) ist nun auch $E_1\widehat{A}Q = \pm 90^0$, d. h. AQ senkrecht zu AE_1 und zwar liegt Q im Falle des oberen Zeichens auf der positiven, im Falle des unteren auf der negativen Normalen zur Strecke $AE_1 = \mathfrak{e}$ in A. Demnach hat man entsprechend $AQ = (\overline{AQ})\mathfrak{i}$ und nach der 1. Gleichung (13)

$$AQ = (\overline{AB} : \overline{AC})\mathfrak{i}, \tag{14}$$

worin das Zeichen von $\overline{AB}$ nach der positiven Normale zur positiven Richtung in der Geraden AC zu bestimmen ist.

Die Division ist stets ausführbar, wenn der Divisor nicht Null ist, und zwar nur in einer Weise. Somit gelten hinsichtlich der Multiplication und Division der Strecken dieselben Regeln, wie für die reellen Zahlen.

Die rechtwinkligen Coordinaten des Quotienten $AB : AC$ ergeben sich aus der Figur 11, indem man von B das Loth BH auf AC fällt. Es ist nämlich mit Rücksicht auf die Formeln (12) und (14)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH + HB}{AC} = \frac{AH}{AC} + \frac{HB}{AC} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{HB}}{\overline{AC}}\,i. \tag{15}$$

Fig. 11.

Dabei ist die Strecke $\overline{HB}$ mit demjenigen Zeichen zu versehen, das ihr gemäss der positiven Normale zu einer in der Geraden AC angenommenen positiven Richtung, z. B. AC zukommt.[1])

1) Man hat also die Regel: „Der Punkt B liegt auf der positiven oder negativen Seite der Richtung AC (S. 330 Note), je nachdem die zweite Coordinate des Quotienten $AB : AC$ positiv oder negativ ist.“

Eine Proportion zwischen vier Strecken, d. i. die Gleichung

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \tag{16}$$

bedeutet, wenn die Quotienten nicht reell sind, dass die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ einstimmig ähnlich (bezw. congruent) sind. Denn ist

$$AC \cdot AQ = AB, \quad A'C' \cdot AQ = A'B',$$

so hat man sowohl

$$\triangle AE_1Q \mathrel{\underset{\sim}{\perp}} ACB,$$

als auch

$$\triangle AE_1Q \mathrel{\underset{\sim}{\perp}} A'C'B'.$$

Die Proportion zwischen vier Strecken ist mithin eine Gleichung, deren geometrische Bedeutung von der Wahl der reellen Einheit e nicht abhängt.

Umgekehrt: Sind die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ einstimmig ähnlich, so besteht die Proportion (16), woraus unmittelbar die Gleichungen

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

folgen. In der That hat man unter den genannten Umständen

$$|AC| : |A'C'| = |AB| : |A'B'| \qquad B\widehat{A}C = B'\widehat{A'}C'$$

u. s. w.

Aus (16) ergiebt sich ein arithmetischer Ausdruck für die Thatsache, dass zwei Dreiecke ABC, $A'B'C'$ symmetrisch ähnlich ($\overline{\sim}$) sind, d. i. ihre homologen Winkel entgegengesetzt sind. Wendet man das letztere durch Drehung um die reelle Axe um, so erhält man ein zu ABC einstimmig ähnliches Dreieck $A''B''C''$. Da

$$B''C'' = \text{conj.}\, B'C', \qquad C''A'' = \text{conj.}\, C'A', \qquad A''B'' = \text{conj.}\, A'B'$$

ist, so ergeben sich mithin nach (16) die Gleichungen

$$\frac{\text{conj.}\, B'C'}{BC} = \frac{\text{conj.}\, C'A'}{CA} = \frac{\text{conj.}\, A'B'}{AB}. \tag{17}$$

Mit demselben Rechte können wir auch behaupten, dass

$$\frac{B'C'}{\text{conj.}\, BC} = \frac{C'A'}{\text{conj.}\, CA} = \frac{A'B'}{\text{conj.}\, AB}. \tag{18}$$

9. Conjugirte Gleichungen unter den Strecken.

Die letzte Gleichung wird aus (17) auch gewonnen mittelst des allgemeinen Satzes:

Aus jeder Gleichung unter Strecken kann eine zweite dadurch abgeleitet werden, dass an Stelle einer jeden Strecke die zu ihr conjugirte gesetzt wird.

Um sich von der Richtigkeit desselben zu überzeugen, genügt die Bemerkung, dass Summe, Differenz, Product, Quotient zweier Strecken conjugirt ist der aus den conjugirten Strecken gebildeten entsprechenden Verknüpfung. Das erkennt man u. A. aus den Coordinaten dieser Ausdrücke, indem beim Uebergange zu den conjugirten Strecken die erste Coordinate ungeändert bleibt, die zweite ihr Zeichen wechselt.

10. Die trigonometrischen Functionen.

Sind zwei Gerade durch den Punkt O mit ihren positiven Richtungen a b gegeben (Fig. 12) und fällt man von einem beliebigen Punkte M der letzteren Geraden eine Senkrechte MP auf die erstere, so haben nach einem bekannten Satze der Planimetrie die Verhältnisse

$$\overline{OP} : \overline{OM} \qquad \overline{PM} : \overline{OM},$$

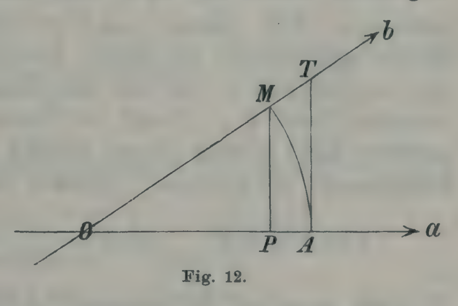


Fig. 12.

worin das Zeichen von $\overline{PM}$ gemäss der positiven Normale zur Richtung a zu bestimmen ist (vgl. Nr. 5), von M unabhängige Werthe, sind somit lediglich vom Winkel $a \frown b$ abhängig. Man bezeichnet den Werth der ersteren als den Cosinus, den der letzteren als den Sinus desselben:

$$\overline{OP} : \overline{OM} = \cos a \frown b, \qquad \overline{PM} : \overline{OM} = \sin a \frown b.$$

Wenn die Richtungen a, b in eine Gerade fallen oder auf einander senkrecht stehen, so verlieren diese Erklärungen zum Theil ihren Sinn. Man setzt aber fest

$$\cos 0 = 1 \quad \sin 0 = 0, \qquad \cos 180^0 = -1 \quad \sin 180^0 = 0,$$
$$\cos(\pm 90^0) = 0 \quad \sin(\pm 90^0) = \pm 1,$$

und zwar deshalb, weil die Functionen $\cos a \frown b$, $\sin a \frown b$ die rechts stehenden Werthe zu Grenzwerthen haben, wenn bei Festhaltung von a der Strahl b sich einer der bezeichneten Lagen unbeschränkt nähert. Wird endlich angenommen, dass unter n eine beliebige ganze Zahl verstanden,

$$\cos(\alpha + n \cdot 360^0) = \cos \alpha$$
$$\sin(\alpha + n \cdot 360^0) = \sin \alpha$$

ist, so sind die Functionen $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ für beliebige positive und negative Winkel α erklärt. Mit Rücksicht auf die letzten Gleichungen bezeichnet man sie als periodische Functionen von α und zwar mit der Periode 360^0.

Kein Werth des Cosinus und des Sinus liegt ausserhalb des Intervalles $(-1, +1)$. Zufolge des pythagoräischen Satzes besteht zwischen beiden Functionen die Gleichung[1])

$$\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 = 1. \tag{1}$$

Es seien die Polarcoordinaten der Strecke OM (Fig. 4 in Nr. 5) $|OM| = \varrho$, $E\widehat{O}M = \theta$. Dann hat man, wenn $X\widehat{O}Y = +90^0$ ist,

$$\xi = \overline{OP} = \varrho\cos\theta, \qquad \eta = \overline{PM} = \varrho\sin\theta; \tag{2}$$

so dass die complexe Zahl $OM = \xi + \eta i$ in der Form

$$OM = \varrho\{\cos\theta + i\sin\theta\} \tag{3}$$

erscheint. Der Factor $\cos\theta + i\sin\theta$ soll nach R. Argand[2]) Richtungsfactor, der ganze Ausdruck $\varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$ die trigonometrische Form der complexen Grösse OM heissen. Um die complexe Zahl $\xi + \eta i$ auf die Form (3) zu bringen, hat man eine positive Zahl ϱ und einen Winkel θ zu bestimmen, welche den Gleichungen (2) genügen. Hieraus findet man nach (1)

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \qquad \cos\theta = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \qquad \sin\theta = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Es giebt zwischen den Grenzen -180^0 bis $+180^0$ stets einen und nur einen Werth von θ, welcher die beiden letzten Gleichungen befriedigt.

Manchmal lässt man die positive Richtung r in der Geraden OM willkürlich. Dann erhält man

$$OM = \overline{OM}(\cos x^\wedge r + i\sin x^\wedge r), \tag{4}$$

unter x die positive Richtung der reellen Axe verstanden. Aehnlich ist für eine beliebige Strecke AB mit der positiven Richtung g

$$AB = \overline{AB}(\cos x^\wedge g + i\sin x^\wedge g). \tag{4*}$$

Für die conjugirten Strecken $\xi + \eta i$, $\xi - \eta i$ sind die Neigungen entgegengesetzt, man hat daher

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta.$$

Aehnlich findet man mittelst der zu $\xi + \eta i$ associirten Strecken die Formeln

---

1) Die von Gauss empfohlenen (vgl. Grunert, Arch. 38. Bd. S. 366) und angewandten Schreibweisen $\cos\alpha^n$ statt $(\cos\alpha)^n$, $\cos(\alpha^n)$ u. s. w. scheinen zu einigen anderen, wie dx^2 für $(dx)^2$ dagegen $d(x^2)$, $f(x^2)$, besser zu passen als die gegenwärtig mehr verbreiteten $\cos^n\alpha$, $\cos\alpha^n$ statt $\cos(\alpha^n)$ u. s. w.

2) Argand, Gergonne Ann. V. p. 208. Cauchy (C. d'Analyse p. 183) nannte $\cos\theta + i\sin\theta$ „l'expression reduite".

$$\cos(\theta \pm 90^0) = \mp \sin\theta \qquad \sin(\theta \pm 90^0) = \pm \cos\theta$$
$$\cos(\theta + 180^0) = -\cos\theta \qquad \sin(\theta + 180^0) = -\sin\theta,$$

welche auch besondere Fälle der folgenden Theoreme sind.

Die Fundamentalsätze der ebenen Trigonometrie sind bekanntlich die Additionstheoreme des Cosinus und Sinus. Dieselben sind enthalten in der Formel (11) von Nr. 6, wodurch die Coordinaten des Productes zweier Strecken gegeben sind. Hierbei reicht die Formel (3) aus, da der Winkel θ alle möglichen Werthe annehmen kann. — In der That, multiplicirt man die Strecken

$$OM = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad OM' = \varrho'(\cos\theta' \pm i\sin\theta'),$$

so hat das Product $OM \cdot OM'$ den absoluten Betrag $\varrho\varrho'$ und die Neigung $\theta \pm \theta'$. Demnach ergiebt sich nach (11) in Nr. 6

$$\varrho\varrho'[\cos(\theta \pm \theta') + i\sin(\theta \pm \theta')]$$
$$= \varrho\varrho'\{\cos\theta\cos\theta' \mp \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' \pm \cos\theta\sin\theta')\},$$

woraus die genannten Additionstheoreme d. i. die Formeln

$$\begin{aligned}\cos(\theta \pm \theta') &= \cos\theta\cos\theta' \mp \sin\theta\sin\theta' \\ \sin(\theta \pm \theta') &= \sin\theta\cos\theta' \pm \cos\theta\sin\theta'\end{aligned} \tag{5}$$

folgen.

Damit in der Formel (3) und den daraus abgeleiteten nur Längenverhältnisse erscheinen, wählt man als Argument des Cosinus und Sinus den Quotienten

$$\tau = \overline{\operatorname{arc} AM} : |OA|,$$

welcher für jeden Punkt M des Halbstrahles Ob denselben Werth hat, wobei der Bogen AM dem Sinne der Bewegung von A bis M entsprechend mit dem Zeichen $+$ oder $-$ zu versehen ist. Zufolge der Cyclometrie besteht zwischen ihm und dem Winkel $a^\frown b$ in Secunden die Beziehung

$$\tau = a^\frown b \cdot \operatorname{arc} 1'', \text{ wo } \operatorname{arc} 1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60^2} = \frac{1}{206264{,}8}$$

ist. π bedeutet die Ludolph'sche Zahl 3,1415926536 $\cdots$ — Es ist überflüssig, an Stelle von arc 1″ die davon wenig verschiedene Zahl sin 1″ zu setzen, wie es oft geschieht.

$\cos\tau$, $\sin\tau$ sind eindeutige Functionen von τ für jeden Werth von τ und periodisch mit der Periode 2π. $\cos\tau$ nimmt von $\tau = 0$ bis $\tau = \pi$ beständig ab, von $\tau = \pi$ bis $\tau = 2\pi$ beständig zu; $\sin\tau$ nimmt zu von $\tau = -\frac{\pi}{2}$ bis $\tau = \frac{\pi}{2}$, ab von $\tau = \frac{\pi}{2}$ bis $\tau = \frac{3\pi}{2}$ u. s. f.

Die übrigen trigonometrischen Functionen werden als rationale Functionen von $\cos\tau$, $\sin\tau$ eingeführt:

$$\tan\tau = \frac{\sin\tau}{\cos\tau} \quad \cot\tau = \frac{\cos\tau}{\sin\tau} \quad \sec\tau = \frac{1}{\cos\tau} \quad \operatorname{cosec}\tau = \frac{1}{\sin\tau}.$$

Im Folgenden sind die Argumente der trigonometrischen Functionen, wenn nicht das Gegentheil bemerkt ist, stets als in Theilen des Radius gegeben anzusehen.

Wegen späterer Anwendung ist noch zu erwähnen die Formel

$$\lim_{\tau=0} \frac{\sin\tau}{\tau} = 1. \tag{6}$$

Errichtet man in A (Fig. 12) das Loth AT auf a, so hat man bekanntlich

$$|MP| < |\operatorname{arc} AM| < |AT|,$$

also nach Division durch $|OA|$

$$\sin\tau < \tau < \frac{\sin\tau}{\cos\tau},$$

wobei man sich τ positiv und kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ denkt. Somit ergiebt sich

$$\cos\tau < \frac{\sin\tau}{\tau} < 1,$$

sodass

$$0 < 1 - \frac{\sin\tau}{\tau} < 1 - \cos\tau \tag{7}$$

ist. Nun ist bekanntlich

$$1 - \cos\tau = 2\left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad \sin\frac{\tau}{2} < \frac{\tau}{2},$$

folglich ist $1 - \cos\tau < \tau^2 : 2$. Bedeutet ε irgend eine positive Zahl und denken wir uns $0 < \tau < \sqrt{2\varepsilon}$, so ist zufolge (7)

$$0 < 1 - \frac{\sin\tau}{\tau} < \varepsilon. \tag{8}$$

Diese Ungleichung gilt aber auch, falls $0 > \tau > -\sqrt{2\varepsilon}$ ist, weil der Bruch $\sin\tau : \tau$ sich nicht ändert, wenn man τ mit $-\tau$ vertauscht. Es besteht somit die Beziehung (8), wenn nur $|\tau| < \sqrt{2\varepsilon}$ ist. Genau das Nämliche besagt die Formel (6) zufolge einer naheliegenden Verallgemeinerung des auf S. 161 eingeführten Grenzwerthbegriffes. Die einzige Abänderung besteht darin, dass während dort die unabhängige Veränderliche jeden Werth unter den natürlichen Zahlen annehmen darf, sie nunmehr jeden von 0 beliebig wenig abstehenden Werth, mag er rational oder irrational sein, erhalten kann.

Uebungen zum XI. Abschnitt.

1. Planimetrische Aufgaben.

Auf das im Vorstehenden betrachtete Grössensystem lässt sich eine Arithmetik der Lage in der Ebene gründen, welche, wie die folgenden Beispiele zeigen, bei Auflösung von Aufgaben von wesentlichem Nutzen sein kann.

1) „Ein Dreieck XYZ zu construiren, wenn gegeben ist sein Schwerpunkt G und von den Seiten XY, XZ je ein Punkt (M, N), der die bezügliche Seite in einem vorgeschriebenen Verhältnisse theilt." Es sei also

$$YM : MX = \alpha, \qquad ZN : NX = \beta, \tag{1}$$

worin α, β reelle, von Null und -1 verschiedene Zahlen bedeuten.

Nach Nr. 5 Anm. hat man zunächst

$$GX + GY + GZ = 0. \tag{2}$$

Es ist leicht GY, GZ auf GX zurückzuführen. Man findet

$$GY = GM + MY = GM + \alpha XM = (1 + \alpha)\, GM + \alpha XG$$
$$GZ = GN + NZ = GN + \beta XN = (1 + \beta)\, GN + \beta XG.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (2) ein, so folgt

$$(\alpha + \beta - 1)\, GX = (1 + \alpha)\, GM + (1 + \beta)\, GN. \tag{3}$$

$\alpha + \beta - 1$ ist Null oder nicht Null, je nachdem die Punkte $G\ M\ N$ in gerader Linie liegen oder nicht. Bilden sie nämlich eine Gerade, so müsste, wenn $\alpha + \beta - 1$ nicht $= 0$ wäre, X zufolge (3) auf GMN liegen, was unmöglich ist. Wir haben somit den Satz: „Wenn man durch den Schwerpunkt G des Dreiecks XYZ die Gerade MN zieht, so muss

$$(\overline{YM} : \overline{MX}) + (\overline{ZN} : \overline{NX}) = 1$$

sein." Umgekehrt, ist $\alpha + \beta = 1$, so hat nach (3) $GM : GN$ einen reellen Werth, also liegen $G\ M\ N$ in einer Geraden. — Wenn $G\ M\ N$ nicht in einer Geraden liegen, so liefert Gleichung (3) die Strecke GX, also X, worauf YZ mittelst der Gleichungen (1) gefunden werden. Ist z. B. $\alpha = 2$, $\beta = 3$, so hat man

$$4GX = 3GM + 4GN \qquad GX = \tfrac{3}{4} GM + GN.$$

Construirt man (Fig. 13) $GR = \frac{3}{4} GM$, $RL = GN$, so folgt $GX = GL$, also fällt X nach L. Endlich hat man

$$YM = 2MX \qquad ZN = 3NX.$$

2) „Zwei ungleiche Strecken AB, $A'B'$, welche weder in einer Geraden liegen, noch den nämlichen Anfangs- oder Endpunkt haben, sind gegeben. Es soll ein Punkt X so bestimmt werden, dass die Dreiecke ABX und $A'B'X$ einstimmig ähnlich sind."

Wegen der einstimmigen Aehnlichkeit der Dreiecke ABX und $A'B'X$ hat man nach Nr. 8

$$AX : A'X = AB : A'B',$$

also

$$AX \cdot A'B' = A'X \cdot AB$$

$$AX \cdot A'B' = (A'A + AX) \cdot AB$$
$$AB \cdot AA' = AX \cdot (AB - A'B'). \tag{4}$$

Sind AB, $A'B'$ ungleich, so giebt es einen und nur einen Punkt X, der

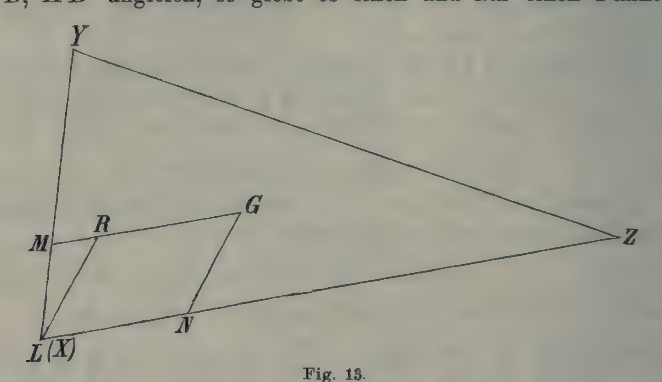


Fig. 13.

sich auf folgende Art construiren lässt. Wenn $BC = B'A'$ ist, so hat man nach (4)

$$AB \cdot AA' = AX \cdot AC, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AA'}. \tag{5}$$

Sind die Geraden AB, $A'B'$ nicht parallel (Fig. 14), so bilden $A\ B\ C$ ein Dreieck, mithin sind nach (5) die Dreiecke ABC und AXA' einstimmig ähnlich. Man construire also

$$A\widehat{A'}X = A\widehat{C}B \qquad A'\widehat{A}X = C\widehat{A}B.$$

Liegen die ungleichen Strecken AB, $A'B'$ in parallelen Geraden, so muss nach (5) $AX : AA'$ reell sein, somit X auf AA' fallen. Auf ähnliche Art ergiebt sich, dass X auf BB' liegen muss. Demnach ist X der Schnittpunkt von AA' und BB'. — Wenn $AB = A'B'$ ist, so giebt es nach (4) keinen Punkt X.

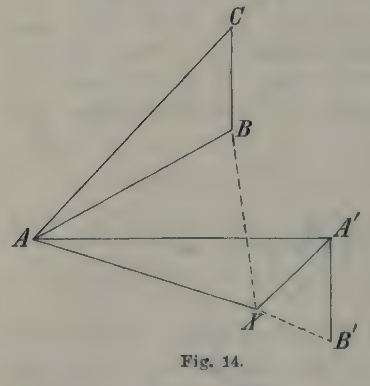


Fig. 14.

3) „Zwei Strecken AB, $A'B'$, die weder gleiche Länge, noch denselben Anfangs- oder Endpunkt haben, sind gegeben. Es wird ein solcher Punkt X gesucht, dass die Dreiecke ABX und $A'B'X$ symmetrisch ähnlich sind."

Nach Nr. 8 hat man

$$AX : \text{conj.}\, A'X = AB : \text{conj.}\, A'B'$$

$$AX \cdot \text{conj.}\, A'B' = AB \cdot \{\text{conj.}\, A'A + \text{conj.}\, AX\} \tag{6}$$

und dann nach dem Satze von Nr. 9

$$\text{conj.}\, AX \cdot A'B' = \text{conj.}\, AB \cdot \{A'A + AX\}. \tag{7}$$

Löst man diese linearen Gleichungen nach AX und conj. AX auf, so erhält man

$$(AB \cdot \text{conj.}\, AB - A'B' \cdot \text{conj.}\, A'B') \cdot AX = AB \cdot (AA' \cdot \text{conj.}\, AB + A'B' \cdot \text{conj.}\, AA').$$

Der Coefficient von AX ist $|AB|^2 - |A'B'|^2$; somit hat die Aufgabe eine Lösung, wenn die gegebenen Strecken nicht gleich lang sind. Ordnet man der Strecke AA' die positive Einheit zu, so dass

$$AA' = \text{conj.}\, AA' = 1$$

ist, so ergiebt sich

$$(|AB|^2 - |A'B'|^2)\, AX = AB \cdot (\text{conj.}\, AB + A'B'). \tag{8}$$

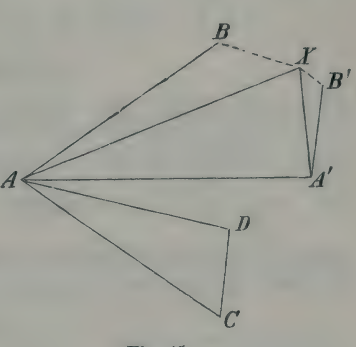


Fig. 15.

Construirt man (Fig. 15)

$$AC = \text{conj.}\, AB, \qquad A'B' = CD,$$
$$AC + A'B' = AD,$$

so findet man

$$(|AB|^2 - |A'B'|^2)\, AX = AB \cdot AD.$$

Je nachdem $|AB|$ grösser oder kleiner als $|A'B'|$ ist, ist also $A'\widehat{A}X$ gleich

$$A'\widehat{A}B + A'\widehat{A}D = C\widehat{A}A' + A'\widehat{A}D = C\widehat{A}D$$

oder um 180^0 davon verschieden, wodurch man einen Halbstrahl findet, auf dem X liegt. Vermittelst der Gleichung

$$B'\widehat{A'}X = -B\widehat{A}X = X\widehat{A}B$$

ergiebt sich ein zweiter Halbstrahl, auf dem X sich befindet, so dass der verlangte Punkt nunmehr gefunden ist.

Wenn $|AB| = |A'B'|$, ohne dass A und A' zusammenfallen, so giebt es nach (8) keinen Punkt X, es sei denn

$$A'B' = -\text{conj.}\, AB = CA \quad \text{(Fig. 16)}.$$

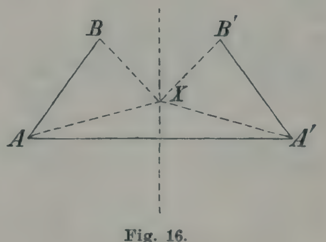


Fig. 16.

Nunmehr gehen die beiden Gleichungen (6) und (7) über in

$$AX + \text{conj.}\, AX = 1.$$

D. h. es genügt jeder Punkt der im Mittelpunkte von AA' auf diese Strecke errichteten Senkrechten der Forderung:

$$\triangle ABX \approx A'B'X.$$

Nach diesen Aufgaben ersten Grades möge noch eine zweiten Grades behandelt werden.

4) „Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite AB, die Differenz der ihr anliegenden Winkel und das Product γ der beiden anderen Seiten gegeben ist."

Vom gesuchten Dreieck sind somit zwei Ecken A, B gegeben, die dritte X zu bestimmen. Dabei sind gegeben

$$|AX| \cdot |BX| = \gamma,$$

$$B\widehat{A}X - X\widehat{B}A = (B\widehat{A}E + E\widehat{A}X) - (X\widehat{B}E_1 + E_1\widehat{B}A)$$
$$= E\widehat{A}X + E_1\widehat{B}X - \{E\widehat{A}B + E_1\widehat{B}A\}$$

(worin die Punkte EE_1 der Bedingung $AE = BE_1 = 1$ genügen), somit auch $E\widehat{A}X + E_1\widehat{B}X$. Construirt man den Winkel

$$B\widehat{A}D = B\widehat{A}X - X\widehat{B}A$$

(Fig. 17), welche Differenz als auch dem Zeichen nach gegeben anzusehen ist, und nimmt man dabei den Punkt D so an, dass

$$|AD| \cdot |BA| = \gamma,$$

so hat man

$$|AX| \cdot |BX| = |AD| \cdot |BA|$$

$$E\widehat{A}X + E_1\widehat{B}X = E\widehat{A}D + E_1\widehat{B}A,$$

demnach

$$AX \cdot BX = AD \cdot BA.$$

Bedeutet C den Mittelpunkt von AB, so dass $AC = CB$

$$AX = AC + CX \qquad BX = BC + CX = CX - AC$$

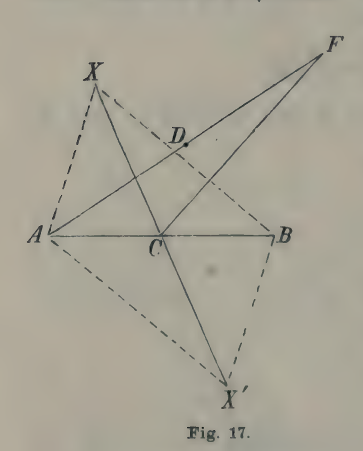


Fig. 17.

ist, so erhält man

$$CX^2 - AC^2 = AD \cdot BA = 2AD \cdot CA$$
$$CX^2 = CA\,\{CA + 2AD\} = CA \cdot CF,$$

wobei $AF = 2AD$ gemacht ist. Aus dieser Gleichung folgt für $CE_2 = 1$

$$2E_2\widehat{C}X = E_2\widehat{C}A + E_2\widehat{C}F$$
$$|CX|^2 = |CA| \cdot |CF|.$$

Addirt man in der ersteren Gleichung beiderseits $2A\widehat{C}E_2$, so ergiebt sich

$$2A\widehat{C}X = A\widehat{C}F$$

$$A\widehat{C}X = \tfrac{1}{2}A\widehat{C}F + \begin{cases}0\\180^0.\end{cases}$$

Unsere Aufgabe lässt somit zwei Lösungen X, X' zu, welche Punkte auf

der Halbirungslinie des Winkels $\widehat{ACF}$ liegen, zu beiden Seiten von C und je in einem Abstande, welcher gleich ist der mittleren geometrischen Proportionale von $|CA|$ und $|CF|$. Demnach sind die Dreiecke ABX und BAX' einstimmig congruent, also nur der Lage nach verschieden.

5) „Auf zwei gegebenen Halbstrahlen AB und $A'B'$, die in einer Ebene liegen, je einen Punkt XX' so zu bestimmen, dass die Längen der Strecken AX, AX', XX' sich wie gegebene absolute Zahlen verhalten." Da die Längeneinheit in der genannten Ebene willkürlich ist, so kann man die Proportion

$$|AX| : |AX'| : |XX'| = \alpha : \alpha' : 1$$

festsetzen. (Vgl. Nouv. Ann. 2. VIII. S. 338.)

6) Von einem Dreieck ABC sind gegeben die Längen der beiden Seiten AB, AC und die Länge des Stückes der Halbirungslinie des von ihnen gebildeten Winkels $\widehat{BAC}$ vom Scheitel A bis zu der ihm gegenüberliegenden Seite BC. Das Dreieck ist zu construiren. (Vgl. Nouv. Ann. 2. XII. S. 248.)

7) Construction des Punktes X, welcher der quadratischen Gleichung

$$AX \cdot BX = AC \cdot BD$$

genügt, worin die Punkte A und B von einander verschieden seien.

8) Genügen die von den Punkten ABC einer- und den Punkten $A'B'C'$ andererseits gebildeten Strecken den Gleichungen

$$BC \cdot B'C' = CA \cdot C'A' = AB \cdot A'B',$$

so sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ beide gleichseitig und zwar symmetrisch ähnlich.

9) Die Verhältnisse der ebenen Strecken zu einander können schon unmittelbar nach Nr. 4 eingeführt werden. Man erklärt die Verhältnisse $AB : AC$ und $A'B' : A'C'$ dann und nur dann einander gleich, wenn die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ einstimmig ähnlich sind (Verallgemeinerung der Erklärung in der Uebung 18), Nachtrag zu S. 137). Alsdann ergeben sich die nämlichen Proportionen wie in VI. 4 und 5 und der Satz in VI. 6. Zum Rechnen mit den Strecken geht man über durch die Erklärung des Products zweier Strecken nach Cartesius (S. 130) als der Strecke, welche zur einen von ihnen sich so verhält, wie die andere zur Einheit $\mathfrak{e}$. Nachweis der Multiplicationsgesetze wie in Uebung 13) auf S. 137. Weiter gelangt man durch die in VI. 7—9 und XI. 7 angestellten Betrachtungen von diesen Verhältnissen zu den gemeinen complexen Zahlen.

Bei dieser Auffassung lässt sich die Strecke $\mathfrak{i}$ als die mittlere Proportionale zwischen $\mathfrak{e}$ und $-\mathfrak{e}$ erklären.

2. Aufgaben aus der Trigonometrie und analytischen Geometrie.

1) Construction der Coordinaten der Summe, der Differenz, des Productes, des Quotienten zweier gemeinen complexen Zahlen, wobei die

Grundformeln der Goniometrie (vgl. Nr. 10) als bekannt vorauszusetzen sind.

2) Sind $\alpha\beta$ $\alpha'\beta'$ $\alpha''\beta''$ die Coordinaten der Punkte ABC, so ist die Zahl des Dreiecks ABC

$$[\alpha(\beta'-\beta'')+\alpha'(\beta''-\beta)+\alpha''(\beta-\beta')]:2.$$

Mittelst der Formel (15) (S. 339) erhält man die Dreiecksfläche ABC (mit dem Zeichen $+$ oder $-$ versehen, je nachdem der Umlauf $ABCA$ einem innerhalb des Dreiecks befindlichen Beobachter positiv oder negativ erscheint) ausgedrückt durch die Coordinaten der Eckpunkte A, B, C, welche bezw. $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$ sein mögen. Für diese relative Dreiecksfläche ABC ergiebt sich

$$2\triangle ABC=\overline{AB}\cdot\overline{KC},$$

worin das Zeichen der auf die Gerade AB senkrechten Strecke $\overline{KC}$ (Fig. 11) nach der positiven Normale zur positiven Richtung in AB zu bestimmen ist.

Ermittelt man nun die Coordinaten von $AC:AB$ durch die Bemerkung, dass

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC\cdot\text{conj.}\,AB}{AB\cdot\text{conj.}\,AB}=\frac{AC\cdot\text{conj.}\,AB}{|AB|^2},$$

worin

$$AC=(\alpha''-\alpha)+(\beta''-\beta)i$$
$$AB=(\alpha'-\alpha)+(\beta'-\beta)i$$

ist, so findet man

$$\frac{\overline{KC}}{\overline{AB}}=\frac{(\alpha'-\alpha)(\beta''-\beta)-(\beta'-\beta)(\alpha''-\alpha)}{|AB|^2}$$

und

$$2\triangle ABC=(\alpha'-\alpha)(\beta''-\beta)-(\beta'-\beta)(\alpha''-\alpha)$$
$$=\alpha(\beta'-\beta'')+\alpha'(\beta''-\beta)+\alpha''(\beta-\beta').$$

3) Bezeichnet man die positiven Richtungen in den Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC bezw. mit a, b, c, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned}\overline{BC}\cos x^\frown a+\overline{CA}\cos x^\frown b+\overline{AB}\cos x^\frown c=0\\ \overline{BC}\sin x^\frown a+\overline{CA}\sin x^\frown b+\overline{BC}\sin x^\frown c=0.\end{aligned}\qquad(1)$$

— Die Formeln ergeben sich unmittelbar aus der Gleichung

$$BC+CA+AB=0$$

in Nr. 3, indem man auf die Vectoren BC u. s. w. die Darstellung (4) auf S. 342 sinngemäss anwendet. Lässt man in den Formeln (1) die noch willkürliche x-Richtung mit einer der Richtungen a, b, c zusammenfallen, so erhält man den Sinus- und Cosinussatz der ebenen Trigonometrie.

4) [1]) Sind $A\ B\ C\ D$ vier beliebige Punkte der Ebene, so besteht die Gleichung

---

1) Besonderer Fall eines von Bellavitis und Möbius ausgesprochenen

$$BC \cdot AD + CA \cdot BD + AB \cdot CD = 0. \tag{2}$$

— Der Beweis ist der nämliche wie für die gleichlautende Beziehung unter den von vier Punkten einer Geraden gebildeten sechs Strecken (S. 180).

5) a. Man zerlege im Falle dass die Punkte $A\ B\ C$ einer Geraden angehören, die Gleichung (2) durch Darstellung der Strecken BC, AD u. s. w. in der Form (4) auf S. 342 in zwei reelle Formeln.

b. Liegen von den vier Punkten $A\ B\ C\ D$ keine drei in einer Geraden, gehören aber die drei Strecken

$$B_1 C_1 = BC \cdot AD \qquad C_1 A_1 = CA \cdot BD \qquad A_1 B_1 = AB \cdot CD$$

einer Geraden an, so liegen die Punkte $A\ B\ C\ D$ auf einem Kreise. — Und es gilt der ptolemäische Satz:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 |BC| \cdot |AD| - \varepsilon_3 |CA| \cdot |BD| - \varepsilon_2 |AB| \cdot |CD| &= 0 \\ -\varepsilon_3 |BC| \cdot |AD| + \varepsilon_0 |CA| \cdot |BD| - \varepsilon_1 |AB| \cdot |CD| &= 0 \\ -\varepsilon_2 |BC| \cdot |AD| - \varepsilon_1 |CA| \cdot |BD| + \varepsilon_0 |AB| \cdot |CD| &= 0, \end{aligned}$$

worin $\varepsilon_0\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ positive oder negative Einheiten, die im Zeichen mit den Dreieckflächen ABC, BCD, CAD, ABD übereinstimmen, bedeuten.

6) „Ist das Doppelverhältniss der vier Punkte $A\ B\ C\ D$ in der Ebene d. i. der Quotient $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ reell, so liegen diese vier Punkte entweder auf einer Geraden oder auf einem Kreise.“ — Durch sinngemässe Anwendung der Formeln (13) S. 339 findet man die Gleichung

$$\frac{CA}{CB} = \left|\frac{CA}{CB}\right| \{\cos B\widehat{C}A + i \sin B\widehat{C}A\}, \tag{3}$$

mit deren Hilfe der Satz sich ergiebt.

Uebertragungsprincipes aus der Geometrie der Geraden in die der Ebene: „Wenn man in einer Gleichung zwischen den von beliebigen Punkten einer Geraden gebildeten Strecken diese Punkte durch beliebige Punkte der Ebene ersetzt, so erhält man eine Gleichung unter den von den letzteren Punkten gebildeten Strecken.“

XII. Abschnitt.

Complexe Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.

1. Producte, Potenzen und Quotienten von complexen Zahlen in trigonometrischer Form.

Sind die beiden complexen Zahlen a, b in der trigonometrischen Form

$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad b = B(\cos\beta + i\sin\beta) \qquad (1)$$

gegeben, so ist

$$ab = AB\{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\}$$

und daher zufolge der Formeln (5) S. 343

$$ab = AB\{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergiebt sich für das Product $a_1 a_2 \cdots a_m$, worin

$$a_r = A_r(\cos\alpha_r + i\sin\alpha_r) \qquad (r = 1, 2, \cdots m)$$

ist, die Gleichung

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \cdots a_m &= A_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)\cdot A_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\cdots A_m(\cos\alpha_m + i\sin\alpha_m) \\ &= A_1 A_2 \cdots A_m\{\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)\}. \quad (2) \end{aligned}$$

Wird hier $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = a$, also

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_m = A, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = \alpha$$

gesetzt, so erhält man

$$a^m = A^m(\cos m\alpha + i\sin m\alpha); \qquad (3)$$

insbesondere gewinnt man daraus für $A = 1$ die Moivre'sche Formel

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + i\sin m\alpha. \qquad (4)$$

Mit Hilfe der Formeln (1) S. 342 und (5) S. 343 findet man ferner gemäss den Gleichungen (1)

$$\frac{a}{b} = \frac{a(\cos\beta - i\sin\beta)}{b(\cos\beta - i\sin\beta)} = \frac{A}{B}\{\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\}. \qquad (5)$$

Es ist daher insbesondere

$$\frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \qquad (6)$$

und in Rücksicht auf die Formel (4)

$$(\cos\alpha - i\sin\alpha)^m = \frac{1}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m} = \cos m\alpha - i\sin m\alpha. \qquad (7)$$

Die Formeln (2) und (4) können zur Entwicklung der rechts stehenden Winkelfunctionen benutzt werden. So liefert die Formel

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos\alpha^m + m\cos\alpha^{m-1}\sin\alpha\cdot i - \binom{m}{2}\cos\alpha^{m-2}\sin\alpha^2 + \cdots,$$

indem man den reellen Theil und den Coefficienten von i mit den entsprechenden Zahlen in (4) vergleicht, die Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned}\cos m\alpha &= \cos\alpha^m - \binom{m}{2}\cos\alpha^{m-2}\sin\alpha^2 + \binom{m}{4}\cos\alpha^{m-4}\sin\alpha^4 - \cdots\\ \sin m\alpha &= \cos m\,\alpha^{m-1}\sin\alpha - \binom{m}{3}\cos\alpha^{m-3}\sin\alpha^3 + \binom{m}{5}\cos\alpha^{m-5}\sin\alpha^5 - \cdots.\end{aligned}\right\}(8)$$

Die Ausdrücke rechts sind soweit fortzusetzen, als der Index der Binomialcoefficienten m nicht übersteigt. Man hat also

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2, \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

u. s. f.

Ist m gerade, so können $\cos m\alpha$ und $\sin m\alpha : \sin\alpha\cos\alpha$ als ganze Functionen sowohl von $\sin\alpha$ als auch von $\cos\alpha$ dargestellt werden, z. B.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin\alpha^2 = 2\cos\alpha^2 - 1.$$

Ist m ungerade, so sind $\cos m\alpha : \cos\alpha$ und $\sin m\alpha : \sin\alpha$ ganze Functionen sowohl von $\sin\alpha$ als auch von $\cos\alpha$.

Mittels der Formel (2) kann man jedes Glied einer ganzen Function einer endlichen Anzahl von complexen Zahlen in die Form

$$\mathsf{P}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

überführen, wo P ein Monom aus ihren absoluten Beträgen und ϑ ein Aggregat von Vielfachen ihrer Neigungen ist. Hängt der Ausdruck nur von einer complexen Zahl t ab, so wird er auf diese Art in eine endliche trigonometrische Reihe verwandelt. Eine solche kann man z. B. für $\cos\vartheta^m$ und $\sin\vartheta^m$ erhalten, worin m eine natürliche Zahl bedeutet.[1]) Setzt man nämlich

$$\cos\vartheta + i\sin\vartheta = t, \qquad \cos\vartheta - i\sin\vartheta = t', \qquad (9)$$

so ist

$$2\cos\vartheta = t + t', \qquad 2i\sin\vartheta = t - t'.$$

Man hat also, indem $tt' = 1$ ist,

$$(2\cos\vartheta)^m = t^m + mt^{m-2} + \binom{m}{2}t^{m-4} + \cdots + \binom{m}{2}t'^{m-4} + mt'^{m-2} + t'^m.$$

Hier stehen, falls $2r < m$ ist, hinter einander die Glieder $\binom{m}{r}t^{m-2r}$

---

1) Ueber die Entwickelung von $\cos\vartheta^m\ \sin\vartheta^n$, vgl. Hermite, Cours d'Analyse I, (1873) p. 38.

und $\binom{m}{r} t'^{m-2r}$, deren Summe zufolge der Gleichungen (9), (4), (6) und (7)

$$\binom{m}{r}(t^{m-2r} + t'^{m-2r}) = 2\binom{m}{r}\cos(m-2r)\vartheta$$

ergiebt. Wir finden daher bei ungeradem m $(m = 2k+1)$

$$2^{2k}\cos\vartheta^{2k+1} = \cos(2k+1)\vartheta + (2k+1)\cos(2k-1)\vartheta$$
$$+ \binom{2k+1}{2}\cos(2k-3)\vartheta + \cdots + \binom{2k+1}{k}\cos\vartheta.$$

Ist m gerade und $= 2k$, so kommt im Ausdrucke rechts auch das Glied $\binom{2k}{k}$ vor, so dass

$$2^{2k-1}\cos\vartheta^{2k} = \cos 2k\vartheta + 2k\cos(2k-2)\vartheta$$
$$+ \binom{2k}{2}\cos(2k-4)\vartheta + \cdots + \binom{2k}{k-1}\cos 2\vartheta + \tfrac{1}{2}\binom{2k}{k}$$

ist. Auf ähnliche Art ergeben sich die Formeln

$$(-1)^k 2^{2k}\sin\vartheta^{2k+1} = \sin(2k+1)\vartheta - (2k+1)\sin(2k-1)\vartheta$$
$$+ \binom{2k+1}{2}\sin(2k-3)\vartheta + \cdots + (-1)^k\binom{2k+1}{k}\sin\vartheta,$$

$$(-1)^k 2^{2k-1}\sin\vartheta^{2k} = \cos 2k\vartheta - 2k\cos(2k-2)\vartheta$$
$$+ \binom{2k}{2}\cos(2k-4)\vartheta - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{2k}{k-1}\cos 2\vartheta$$
$$+ \tfrac{1}{2}(-1)^k\binom{2k}{k}.$$

2. Die Wurzeln aus complexen Zahlen.

Nach X. 10 gelten für die Potenzen der complexen Zahlen mit positiven ganzen Exponenten dieselben Sätze, wie für jene der reellen Zahlen. Es liegt daher nahe, auch den Begriff der Wurzel auf die complexen Zahlen auszudehnen. Zu diesem Zwecke untersuchen wir, welche Zahlen x der Gleichung

$$x^m = a, \tag{1}$$

worin a eine complexe, m eine natürliche Zahl bedeutet, genügen. Für $m = 2$ ist dies schon in X. 10 geschehen. Falls aber m grösser als 2 genommen wird, ist auf dem dort eingeschlagenen Wege im allgemeinen nichts zu erreichen. Die vorstehende Gleichung kann jedoch mit Hilfe der Formel (3) S. 352 allgemein gelöst werden. Bringt man nämlich a und x in die trigonometrische Gestalt

$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$x = X(\cos\xi + i\sin\xi),$$

so ist zufolge der soeben genannten Formel zum Bestehen der Gleichung (1) nothwendig und hinreichend, dass

$$X^m = A, \qquad m\xi = \alpha + 2k\pi$$

ist, wo k jede reelle ganze Zahl sein kann. Man findet mithin, dass X die absolute m^{te} Wurzel aus der positiven Zahl A sein muss, während ξ jeden der Werthe

$$\xi = \frac{\alpha + 2k\pi}{m}$$

annehmen darf. Dabei genügt es, k auf die Werthe $0, 1, 2 \cdots m-1$ zu beschränken, da die goniometrischen Functionen (hier Sinus und Cosinus) sich nicht ändern, wenn man ihr Argument um ein Vielfaches von 2π vermehrt oder vermindert. Die daraus hervorgehenden m Werthe von x sind aber wirklich unter sich verschieden. Es besitzt also die Gleichung (1) genau m von einander verschiedene Auflösungen nach x. Wir bezeichnen[1]) eine jede von ihnen mit $\sqrt[m]{*a}$ und nennen sie eine m^{te} Wurzel aus a. Das Zeichen $\sqrt[m]{*a}$, die allgemeine m^{te} Wurzel aus a, ist daher m-deutig.

Das Gesagte gilt auch, wenn a reell, insbesondere gleich der positiven Zahl A ist. Von den m Werthen von $\sqrt[m]{*A}$ ist nur einer reell und positiv. Diesen Werth, welcher den absoluten Betrag aller übrigen angiebt, bezeichnen wir in Uebereinstimmung mit VIII. 5 mit $\sqrt[m]{A}$. Somit lässt sich die allgemeine m^{te} Wurzel aus a durch die Formel

$$\sqrt[m]{*a} = \sqrt[m]{A}\left\{\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{m}\right\} \quad (k = 0, 1, 2 \cdots m-1) \quad (2)$$

darstellen.

Ist a reell und positiv, also $\alpha = 0$ und $a = A$, so geht zufolge der Formel (2) jeder Werth von $\sqrt[m]{*a}$ dadurch, dass man darin k durch $m - k$ ersetzt, in den ihm conjugirten über. Ist dabei m ungerade, so stellt die Formel (2) neben dem reellen Werthe $\sqrt[m]{A}$ noch $\frac{1}{2}(m-1)$ Paare einander conjugirter Zahlen dar; falls dagegen m gerade ist, enthält (2) $\frac{1}{2}(m-2)$ Paare einander conjugirter Zahlen, ausser diesen aber auch noch die beiden Werthe $\pm\sqrt[m]{A}$, von denen der erstere der Annahme $k = 0$, der letztere $k = \frac{m}{2}$ entspricht.

Denken wir uns in der Formel (2) α so angenommen, dass

$$-\pi < \alpha \leqq \pi$$

ist, so heisst der $k = 0$ entsprechende Werth von $\sqrt[m]{*a}$, d. i.

$$\sqrt[m]{A}\left\{\cos\frac{\alpha}{m} + i\sin\frac{\alpha}{m}\right\}$$

1) Nach dem Formulaire des Mathématiques publié par la „Rivista di Matematica“ I. p. 19.

der Hauptwerth[1]) dieser Wurzel. Für ein reelles und positives a ist darunter die positive reelle m^{te} Wurzel aus a zu verstehen. Da demnach $\sqrt[m]{A}$ mit dem Hauptwerth von $\sqrt[m]{{}^*A}$ zusammenfällt, so können wir den Hauptwerth der m^{ten} Wurzel einer jeden Zahl a mit $\sqrt[m]{a}$ bezeichnen, so dass nunmehr die Gleichung

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{A}\left\{\cos\frac{\alpha}{m} + i\sin\frac{\alpha}{m}\right\} \tag{3}$$

besteht.

Wenn a reell und negativ ist, so ist der Hauptwerth der m^{ten} Wurzel aus a die complexe Zahl

$$\sqrt[m]{A}\left\{\cos\frac{\pi}{m} + i\sin\frac{\pi}{m}\right\};$$

z. B. von $\sqrt{{}^*-1}$ ist derselbe i. Falls dabei m ungerade ist, erhält man nach Formel (2) für $k = \frac{1}{2}(m-1)$ den rellen Werth der Wurzel $\sqrt[m]{{}^*-A}$, der also nicht der Hauptwerth ist.

Um die m^{ten} Wurzeln aus der Strecke a geometrisch darzustellen, schlägt man vom Nullpunkte einen Kreis mit dem Radius $\sqrt[m]{A}$, bestimmt darauf den Endpunkt des Hauptwerthes (3) mittelst seiner Neigung $\alpha : m$ und theilt von ihm aus den Kreis in m gleiche Theile. Die m Punkte dieser Theilung bezeichnen die Endpunkte der m verschiedenen, in dem Ausdrucke (2) enthaltenen Werthe.

3. Die m^{ten} Einheitswurzeln. — Aus jedem Werthe von $\sqrt[m]{{}^*a}$ gehen die sämmtlichen durch Multiplication mit je einem der Factoren

$$e_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m} \qquad (k = 0, 1, 2 \cdots m-1)$$

hervor, welche die Auflösungen der Gleichung

$$x^m = 1$$

bilden und aus diesem Grunde m^{te} Wurzeln der Einheit oder m^{te} Einheitswurzeln genannt werden. Diejenigen unter ihnen, von welchen keine niedrigere als die m^{te} Potenz gleich 1 ist, heissen primitiv. Soll für die natürliche Zahl n

$$e_k^n = \cos\frac{2nk\pi}{m} + i\sin\frac{2nk\pi}{m} = 1$$

sein, so muss $nk : m$ eine ganze Zahl sein. Haben k und m den grössten gemeinsamen Theiler d und ist $m = dm'$, so muss dem-

1) Die Bezeichnung „Hauptwerth" der m^{ten} Wurzel, des Logarithmus (vgl. Nr. 6) und der Potenz (vgl. Nr. 8) stammt von Weierstrass. Cauchy gebrauchte dafür die von E. G. Björling vorgeschlagenen Namen: „racine, logarithme, puissance principale" (vgl. des letzteren Artikel in Grunert A. XXI. p. 1 und Cauchy, Exercices d'Analyse IV. p. 253).

gemäss n ein Vielfaches von m' sein. Der kleinste Exponent n, für welchen

$$e_k^n = 1$$

wird, oder wie man dies auch auszudrücken pflegt, der Exponent, zu welchem e_k gehört, ist somit $n = m'$. Daraus folgt, dass e_k dann und nur dann eine primitive m^{te} Einheitswurzel ist, wenn $m' = m$, also wenn k und m zu einander theilerfremd sind. Die Anzahl der primitiven m^{ten} Einheitswurzeln ist daher stets gleich der Anzahl jener natürlichen Zahlen, welche kleiner als m und dabei zu m theilerfremd sind.

Bezeichnet man mit e irgend eine primitive m^{te} Einheitswurzel, so sind die sämmtlichen m^{ten} Einheitswurzeln durch

$$1, \; e, \; e^2 \; \cdots \; e^{m-1}$$

dargestellt. Denn es erhellt unmittelbar, dass jede Potenz e^r, worin r eine natürliche Zahl vorstellt, die Gleichung $x^m = 1$ befriedigt; wenn ferner r und s zwei von einander verschiedene, natürliche Zahlen kleiner als m bedeuten, von denen die erstere die grössere sein möge, so sind auch e^r und e^s von einander verschieden, weil $r - s$ nicht durch m theilbar ist.

Satz: „Die Summe der n^{ten} Potenzen der m verschiedenen m^{ten} Einheitswurzeln ist m oder 0, je nachdem n durch m theilbar ist oder nicht.“ — Der erste Theil des Satzes ist unmittelbar ersichtlich. Hinsichtlich des zweiten beachte man, dass, wenn e eine primitive m^{te} Einheitswurzel bedeutet,

$$e_0 = 1, \;\; e_1 = e, \;\; e_2 = e^2 \; \cdots \; e_{m-1} = e^{m-1}$$

gesetzt werden kann, wonach sich, da $e^m = 1$, e^n aber von 1 verschieden ist,

$$\begin{aligned} e_0^n + e_1^n + \cdots + e_{m-1}^n &= 1 + e^n + e^{2n} + \cdots + e^{(m-1)n} \\ &= (1 - e^{mn}) : (1 - e^n) = 0 \end{aligned}$$

ergiebt.

4. Sätze über die allgemeinen Wurzeln.

Wegen der Vieldeutigkeit der m^{ten} Wurzeln im Systeme der gemeinen complexen Zahlen erleiden die Sätze 1)—5) in VIII. 6 mehrfache Abänderungen, Einschränkungen und Zusätze. Bevor man überhaupt den Versuch unternehmen kann, jene Sätze in Gestalt von Gleichungen auf die allgemeinen Wurzeln auszudehnen, muss man sich vorerst über die Bedeutung einer Gleichung zwischen zwei mehrdeutigen Ausdrücken Klarheit verschaffen. Da eine solche an und für sich einen mehrfachen Sinn haben kann, so setzen wir Folgendes fest: Sind A und B zwei mehrdeutige Ausdrücke, so soll die Gleichung

$$A = B$$

besagen, dass jeder Werth von A einem Werthe von B gleich ist. Ist zufolge dieser Festsetzung auch $B = A$, so heisst die Gleichung $A = B$ nach M. Ohm[1]) eine vollkommene. Vollkommen ist demnach die Gleichung $A = B$, falls die Anzahl der Werthe von A und B eine endliche ist, dann und nur dann, wenn die beiden Ausdrücke A und B gleich viele von einander verschiedene Werthe besitzen.

Auf Grund dieser Erklärungen gelten für die allgemeinen Wurzeln die folgenden Sätze:

1) „Jede n^{te} Wurzel aus einer m^{ten} Wurzel aus a ist eine $(nm)^{\text{te}}$ Wurzel aus a und umgekehrt. Die Gleichung

$$\sqrt[n]{*\sqrt[m]{*a}} = \sqrt[nm]{*a} \tag{1}$$

ist also vollkommen; auch gilt dieselbe für die Hauptwerthe der darin vorkommenden Wurzeln."

Beweis: Um den ersten Theil des Satzes zu beweisen, sei

$$\sqrt[m]{*a} = x, \quad \sqrt[n]{*x} = y;$$

dann hat man

$$a = x^m, \quad x = y^n, \quad \text{also} \quad a = y^{mn} \quad \text{und} \quad y = \sqrt[mn]{*a}.$$

Ist umgekehrt y eine $(mn)^{\text{te}}$ Wurzel aus a, so ist

$$a = y^{mn} = (y^n)^m, \quad \text{mithin} \quad y^n = \sqrt[m]{*a} \quad \text{und} \quad y = \sqrt[n]{*\sqrt[m]{*a}}.$$

Man kann sich übrigens auch leicht direct davon überzeugen, dass die beiden Ausdrücke auf der linken und rechten Seite der Gleichung (1) gleich viele Werthe besitzen, die letztere also vollkommen sein muss. — Um auch den zweiten Theil des Satzes zu zeigen, sei

$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad (-\pi < \alpha \leqq \pi). \tag{2}$$

Dann ist

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{A}\left\{\cos\frac{\alpha}{m} + i\sin\frac{\alpha}{m}\right\}$$

und daher

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{A}\left\{\cos\frac{\alpha}{mn} + i\sin\frac{\alpha}{mn}\right\} = \sqrt[mn]{a}.$$

2) „Die Gleichung

$$\left(\sqrt[mp]{*a}\right)^{np} = \left(\sqrt[m]{*a}\right)^n \tag{3}$$

ist vollkommen und auch für die Hauptwerthe der beiden Wurzeln giltig."

Beweis: Ist zunächst $\left(\sqrt[mp]{*a}\right)^{np}$ gegeben, so hat man nach 1)

$$\left(\sqrt[mp]{*a}\right)^{np} = \left(\sqrt[p]{*\sqrt[m]{*a}}\right)^{np} = \left\{\left(\sqrt[p]{*\sqrt[m]{*a}}\right)^p\right\}^n = \left(\sqrt[m]{*a}\right)^n.$$

---

1) M. Ohm, Versuch eines vollk. cons. Systemes etc. II. p. 386.

Wenn dagegen $(\sqrt[m]{*a})^n$ gegeben ist, so findet man

$$(\sqrt[m]{*a})^n = \left\{\left(\sqrt[p]{\sqrt[m]{*a}}\right)^p\right\}^n = \left\{\left(\sqrt[mp]{*a}\right)^p\right\}^n = \left(\sqrt[mp]{*a}\right)^{np}.$$

Dass endlich die Gleichung (3) auch für die Hauptwerthe der darin vorkommenden Wurzeln giltig sei, wird wie oben bei 1) gezeigt.

3) „Die beiden Gleichungen

$$\sqrt[m]{*a} \cdot \sqrt[m]{*b} = \sqrt[m]{*ab}, \quad \sqrt[m]{*a} : \sqrt[m]{*b} = \sqrt[m]{*a:b} \tag{4}$$

sind vollkommen, gelten aber nicht unbedingt für die Hauptwerthe der darin vorkommenden Wurzeln."

Behufs des Beweises der ersten dieser Gleichungen setzen wir

$$\sqrt[m]{*a} = x \quad \text{und} \quad \sqrt[m]{*b} = y,$$

wodurch

$$a = x^m, \quad b = y^m, \quad ab = (xy)^m, \quad \text{also} \quad xy = \sqrt[m]{*ab}$$

wird. Es ist demnach jeder Werth der linken Seite der genannten Gleichung auch ein solcher der rechten. — Setzen wir nun

$$\sqrt[m]{*ab} = z,$$

so ergiebt sich

$$ab = z^m, \quad b = z^m : x^m = (z:x)^m, \quad \sqrt[m]{*b} = z : x$$

und schliesslich

$$z = \sqrt[m]{*a} \cdot \sqrt[m]{*b},$$

d. h. es ist auch jeder Werth der rechten Seite der in Rede stehenden Gleichung ein solcher der linken. — Um zu sehen, ob jene Gleichung für die Hauptwerthe der Wurzeln Geltung habe, sei neben (2)

$$b = B(\cos\beta + i\sin\beta) \qquad (-\pi < \beta \leqq \pi);$$

dann ist

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{AB}\left\{\cos\frac{\alpha+\beta}{m} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{m}\right\}.$$

Ferner hat man

$$ab = AB\{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\}.$$

Es ist daher dann und nur dann

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{AB}\left\{\cos\frac{\alpha+\beta}{m} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{m}\right\},$$

wenn

$$-\pi < \alpha + \beta \leqq \pi,$$

nicht aber, wenn $\alpha + \beta \leqq -\pi$ oder $> \pi$ ist.

Die zweite der Gleichungen (4) folgt unmittelbar aus der ersten.

4) „Es besteht die Gleichung

$$(\sqrt[m]{*a})^n = \sqrt[m]{*a^n}; \tag{5}$$

dieselbe ist vollkommen, falls m und n zu einander theilerfremd

sind, dagegen unvollkommen, falls m und n einen gemeinsamen Theiler besitzen; auch gilt sie nicht immer für die Hauptwerthe der Wurzeln.“ Man hat nämlich neben (2)

$$\sqrt[m]{*a} = \sqrt[m]{A}\left\{\cos\frac{\alpha+2k\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{m}\right\},$$

also

$$\left(\sqrt[m]{*a}\right)^n = \sqrt[m]{A^n}\left\{\cos\frac{n\alpha+2nk\pi}{m} + i\sin\frac{n\alpha+2nk\pi}{m}\right\}. \tag{6}$$

Ferner ist

$$\sqrt[m]{*a^n} = \sqrt[m]{A^n}\left\{\cos\frac{n\alpha+2h\pi}{m} + i\sin\frac{n\alpha+2h\pi}{m}\right\}. \tag{7}$$

Die Werthe (6) und (7) sind dann und nur dann einander gleich, wenn

$$h \equiv nk \pmod{m} \tag{8}$$

ist (vgl. Uebung 4) S. 97). Ist nun k gegeben, so hat diese Congruenz stets eine Wurzel h unter den Zahlen $0, 1, 2 \cdots m-1$. Ist dagegen h gegeben, so besitzt die vorstehende Congruenz dann und nur dann eine Wurzel k, wenn h durch den grössten gemeinsamen Theiler von m und n theilbar ist, also stets, falls m und n zu einander theilerfremd sind. — Steht auf der linken Seite der Gleichung (5) der Hauptwerth der Wurzel, so ist in (6) $k=0$ und daher zufolge (8) auch $h=0$. Dies ergiebt aber nach (7) dann und nur dann den Hauptwerth $\sqrt[m]{a^n}$, wenn

$$n\alpha = \beta + 2mr\pi$$

ist, worin $-\pi < \beta \leqq \pi$ ist, während r eine beliebige reelle ganze Zahl sein kann.

5) „Die Gleichung

$$\sqrt[m]{*a^n} = \sqrt[mp]{*a^{np}} \qquad (p>1) \tag{9}$$

ist stets unvollkommen und gilt nur bedingungsweise für die Hauptwerthe der beiden Wurzeln.“ — Setzt man nämlich

$$\sqrt[m]{*a^n} = x,$$

so ist

$$a^n = x^m, \quad a^{np} = x^{mp} \quad \text{und daher} \quad x = \sqrt[mp]{*a^{np}},$$

also ist jeder Werth links von (9) auch ein solcher rechts. Dass umgekehrt nicht jeder Werth von $\sqrt[mp]{*a^{np}}$ auch ein solcher von $\sqrt[m]{*a^n}$ sein kann, folgt unmittelbar aus der Thatsache, dass die erstere Wurzel mp, die letztere dagegen nur m von einander verschiedene Werthe besitzt. — Bezüglich der Hauptwerthe hat man einerseits

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{A^n}\left\{\cos\frac{\alpha n+2k\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha n+2k\pi}{m}\right\},$$
$$(-\pi < \alpha n + 2k\pi \leqq \pi),$$

andererseits

$$\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{A^n}\left\{\cos\frac{\alpha np + 2h\pi}{mp} + i\sin\frac{\alpha np + 2h\pi}{mp}\right\}$$

$$(-\pi < \alpha np + 2h\pi \leqq \pi).$$

Sollen diese beiden Werthe einander gleich sein, so muss

$$\frac{\alpha n + 2k\pi}{m} = \frac{\alpha np + 2h\pi}{mp}, \quad \text{also} \quad h = kp$$

sein; denn der Unterschied dieser beiden Brüche kann $\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{mp}$, somit $\frac{3\pi}{4}$ nicht übersteigen. Demnach besteht für k die Doppelrelation

$$-\pi < \alpha np + 2kp\pi \leqq \pi, \quad \text{d. i.} \quad -\frac{1}{2p} < k + \frac{\alpha n}{2\pi} \leqq \frac{1}{2p}.$$

Setzt man nun

$$\alpha n = 2q\pi + \beta \qquad (-\pi < \beta \leqq \pi),$$

worin q eine reelle ganze Zahl vorstellt, so muss

$$-\frac{1}{2p} < k + q + \frac{\beta}{2\pi} \leqq \frac{1}{2p}, \tag{10}$$

und, da $-\frac{1}{2} < \beta : 2\pi \leqq \frac{1}{2}$ ist,

$$-\frac{p+1}{2p} < k + q < \frac{p+1}{2p},$$

also $k + q = 0$ sein, wonach sich aus (10)

$$-\frac{\pi}{p} < \beta \leqq \frac{\pi}{p}$$

ergiebt. Nur wenn β dieser Doppelbeziehung genügt, besteht die Gleichung (9) zwischen den Hauptwerthen der beiden Wurzeln.

5. Die natürliche Potenz e^x.

In VIII. 14 wurde gezeigt, dass die Function

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{1}$$

für jeden reellen Werth von x beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth besitzt, der mit der Potenz e^x, worin e die Basis des natürlichen Logarithmensystemes bedeutet, zusammenfällt. Ein solcher Grenzwerth der Function (1) ist nun auch dann vorhanden, wenn x nicht mehr reell, sondern complex ist, und derselbe eignet sich nach Cauchy[1]) und Schlömilch[2]) zur Definition der Exponentialfunction e^x für complexe Werthe von x.

---

1) Cauchy, Exercices d'Analyse IV. p. 232 u. d. f. — Die Formel $e^{\eta i} = \cos\eta + i\sin\eta$ rührt von Euler her, der sie in § 138 der „Introductio" auf dem in Uebung 7*) auf S. 378 angedeuteten Wege ableitete.

2) Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis, 4. Aufl. (1868), § 54.

Wird jedem Werthe der natürlichen Zahl n eine complexe Zahl

$$f(n) = \varphi(n) + \psi(n)i$$

zugeordnet, so heisst $f(n)$ eine eindeutige complexe Function der reellen Veränderlichen n. Und wir sagen, dass wenn die Coordinaten $\varphi(n)$, $\psi(n)$ der Zahl $f(n)$ bei $\lim n = +\infty$ je einen endlichen Grenzwerth α, β besitzen, alsdann die Function $f(n)$ bei $\lim n = +\infty$ den endlichen Grenzwerth $\alpha + \beta i$ hat.[1])

Mit Hilfe des 5. Satzes in VIII. 14 ist es nun leicht, sowohl die Existenz des in Rede stehenden Grenzwerthes nachzuweisen, als auch diesen selbst zu bestimmen. Zu diesem Zwecke setzen wir, da es sich hierbei um complexe Werthe von x handelt, $x = \xi + \eta i$, so dass

$$1 + \frac{x}{n} = 1 + \frac{\xi}{n} + \frac{\eta}{n} i \tag{2}$$

wird. Diesen Ausdruck stellen wir in trigonometrischer Form dar, indem wir

$$1 + \frac{\xi}{n} = \varrho_n \cos\vartheta_n, \qquad \frac{\eta}{n} = \varrho_n \sin\vartheta_n \tag{3}$$

$$(\varrho_n > 0, \quad -\pi < \vartheta_n \leqq \pi)$$

setzen. Dann ist

$$\varrho_n^2 = 1 + \frac{2\xi}{n} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{n^2}, \tag{4}$$

$$\sin\vartheta_n = \eta : n\varrho_n, \qquad \cos\vartheta_n = \left(1 + \frac{\xi}{n}\right) : \varrho_n. \tag{5}$$

Daraus folgt aber für $\lim n = +\infty$ zunächst

$$\lim \varrho_n^2 = 1,$$

also auch (vergl. Uebung 15) S. 225)

$$\lim \varrho_n = 1 \tag{6}$$

und somit

$$\lim \sin\vartheta_n = 0, \qquad \lim \cos\vartheta_n = 1. \tag{7}$$

Die zweite dieser Gleichungen (7) besagt, dass $\cos\vartheta_n$ bei unbegrenztem Wachsen der Veränderlichen n schliesslich positiv bleibt. Daher verlässt der Winkel ϑ_n von einem bestimmten Werthe der Veränderlichen n an das Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nicht mehr. Da nun der Sinus eines Winkels bei wachsendem Argumente im Intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ selbst beständig zunimmt und dabei $\sin 0 = 0$ ist, so ergiebt sich aus der ersten der Gleichungen (7)

$$\lim_{n=+\infty} \vartheta_n = 0. \tag{8}$$

Denn gäbe es, wie gross man auch n wählen mag, immer noch

---

1) Eine andere Form dieser Erklärung findet man auf S. 381.

Werthe von ϑ_n, welche die Relation $\vartheta_n \geqq \delta$ erfüllten, worin δ eine beliebig kleine positive Zahl kleiner als $\frac{\pi}{2}$ bedeutet, so würde für dieselben Werthe von ϑ_n $\sin \vartheta_n \geqq \sin \delta$ sein, und da $\sin \delta > 0$ ist, so könnte die erste der Gleichungen (7) nicht bestehen. Zu demselben Ergebnisse führt die Annahme, dass, wie gross auch n genommen werde, immer noch solche Werthe von ϑ_n vorhanden seien, wofür $\vartheta_n \leqq -\delta$ ist. Es muss also von einem bestimmten Werthe von n an $-\delta < \vartheta_n < \delta$ sein, und die Doppelrelation (7) besagt dasselbe, was durch die Gleichung (8) ausgedrückt ist.

Für die Function (1) gewinnt man aus (2) und (3) mit Hilfe der Moivre'schen Formel den Ausdruck

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \varrho_n^n (\cos n\vartheta_n + i \sin n\vartheta_n). \tag{9}$$

Um zu erfahren, wie sich dieser Ausdruck beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ verhalte, setzen wir zunächst in der Gleichung (4)

$$2\xi + \frac{\xi^2 + \eta^2}{n} = v(n);$$

dann wird

$$\varrho_n^2 = 1 + \frac{v(n)}{n},$$

und da hierin $v(n)$ bei $\lim n = +\infty$ offenbar zu dem Grenzwerthe 2ξ convergirt, so ergiebt sich gemäss des 5. Satzes in VIII. 14

$$\lim_{n=+\infty} \varrho_n^{2n} = \lim_{n=+\infty} \left\{1 + \frac{v(n)}{n}\right\}^n = e^{2\xi}$$

und daraus (vergl. Uebung 15) S. 225)

$$\lim_{n=+\infty} \varrho_n^n = e^{\xi}. \tag{10}$$

Zufolge der ersten der Gleichungen (5) hat man ferner

$$n\vartheta_n = n \sin \vartheta_n \cdot \frac{\vartheta_n}{\sin \vartheta_n} = \frac{\eta}{\varrho_n} \cdot \frac{\vartheta_n}{\sin \vartheta_n}.$$

Hieraus findet man aber, da, wie auf S. 344 gezeigt wurde,

$$\lim_{\tau=0} \frac{\sin \tau}{\tau} = 1 \tag{11}$$

ist, im Hinblicke auf die Formeln (6) und (8)

$$\lim_{n=+\infty} n\vartheta_n = \eta. \tag{12}$$

Weiter hat man

$$\sin n\vartheta_n - \sin \eta = 2 \cos \frac{n\vartheta_n + \eta}{2} \sin \frac{n\vartheta_n - \eta}{2}$$

$$= (n\vartheta_n - \eta) \cos \frac{n\vartheta_n + \eta}{2} \cdot \left(\sin \frac{n\vartheta_n - \eta}{2} : \frac{n\vartheta_n - \eta}{2}\right),$$

also zufolge (11) und (12), da der Betrag des Cosinus die Zahl 1 nie überschreitet,

$$\lim_{n=+\infty} (\sin n\vartheta_n - \sin \eta) = 0,$$

d. i.

$$\lim_{n=+\infty} \sin n\vartheta_n = \sin \eta. \tag{13}$$

Ebenso ist

$$\cos n\vartheta_n - \cos \eta = -2 \sin \frac{n\vartheta_n + \eta}{2} \sin \frac{n\vartheta_n - \eta}{2}$$
$$= -(n\vartheta_n - \eta) \sin \frac{n\vartheta_n + \eta}{2} \cdot \left(\sin \frac{n\vartheta_n - \eta}{2} : \frac{n\vartheta_n - \eta}{2}\right),$$

woraus man in derselben Weise wie (13) die Gleichung

$$\lim_{n=+\infty} \cos n\vartheta_n = \cos \eta \tag{14}$$

erhält. Die Formeln (9), (10), (13) und (14) führen uns nun zu dem Ergebnisse

$$\lim_{n=+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{\xi} (\cos \eta + i \sin \eta). \tag{15}$$

Bezeichnen wir diesen Grenzwerth von $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ der Kürze wegen vorläufig mit $f(x)$, so ist also neben $x = \xi + \eta i$

$$f(x) = e^{\xi} (\cos \eta + i \sin \eta).$$

Setzen wir noch $x' = \xi' + \eta' i$, so haben wir demnach

$$f(x) \cdot f(x') = e^{\xi} (\cos \eta + i \sin \eta) \cdot e^{\xi'} (\cos \eta' + i \sin \eta')$$
$$= e^{\xi + \xi'} \{\cos (\eta + \eta') + i \sin (\eta + \eta')\}.$$

Es besteht also auch für complexe Werthe von x und x' die Gleichung

$$f(x) \cdot f(x') = f(x + x'), \tag{16}$$

welche für reelle x und x' schon in VIII. 14 nachgewiesen wurde. Infolge dessen bezeichnet man die Function $f(x)$ auch für complexe Werthe von x mit e^x und nennt sie die natürliche Potenz oder Exponentialfunction. Demgemäss ist neben $x = \xi + \eta i$

$$e^x = e^{\xi} (\cos \eta + i \sin \eta) \tag{17}$$

und nach Gleichung (16), wenn y eine beliebige Zahl vorstellt,

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}. \tag{18}$$

Auch findet man sofort

$$e^{-x} = 1 : e^x. \tag{19}$$

Da die Winkelfunctionen die Periode 2π besitzen, so ist nach (17) auch die Exponentialfunction e^x periodisch und zwar ist, wie man unmittelbar erkennt, $2\pi i$ ihre Periode, d. h. es ist, welche ganze rationale Zahl k auch bedeuten möge, stets

$$e^{x+2k\pi i} = e^x.$$

Für $x = 0$ erhält man daraus die Formel

$$e^{2k\pi i} = 1. \tag{20}$$

Demnach hat die Gleichung

$$e^x = 1$$

die unendlich vielen Wurzeln $x = 2k\pi i$, worin k jede ganze rationale Zahl sein darf.

Daraus folgt unmittelbar, dass e^x keine algebraische Function sein kann. Denn würde sie, für y gesetzt, einer algebraischen Gleichung $G(x, y) = 0$ genügen, so könnte zu dem Werthe $y = 1$ nur eine endliche Anzahl von Werthen des Argumentes x gehören.

6. Die natürlichen Logarithmen.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der Gleichung

$$e^x = a, \tag{1}$$

worin a eine beliebige Zahl, nur nicht Null sein darf. Setzt man in derselben $x = \xi + \eta i$ und

$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad (-\pi < \alpha \leqq \pi),$$

so gehen aus ihr nach Formel (17) der vorigen Nummer die beiden Gleichungen

$$e^\xi \cos\eta = A\cos\alpha, \qquad e^\xi \sin\eta = A\sin\alpha$$

hervor. Hieraus folgt

$$e^{2\xi} = A^2, \quad e^\xi = A, \quad \xi = lA$$

und somit

$$\cos\eta = \cos\alpha, \qquad \sin\eta = \sin\alpha.$$

Diesen beiden Gleichungen genügen alle Werthe

$$\eta = \alpha + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

und nur diese. Die Wurzeln der Gleichung (1) sind demnach

$$x = lA + (\alpha + 2k\pi)i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Jede Wurzel der Gleichung (1) heisst ein natürlicher Logarithmus von a und wird mit La bezeichnet, so dass

$$La = lA + (\alpha + 2k\pi)i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2}$$

ist. Insbesondere hat man

$$L1 = 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Das unendlich vieldeutige Zeichen La wollen wir den allgemeinen natürlichen Logarithmus von a nennen.

Unter den unbegrenzt vielen Werthen von La befindet sich einer, nämlich $lA + \alpha i$, dessen imaginärer Theil einen zwischen $-\pi$ und

$+\pi$ ($+\pi$ eingeschlossen) gelegenen Coefficienten besitzt. Er heisst der Hauptwerth des allgemeinen natürlichen Logarithmus von a und wird mit la bezeichnet. Also ist

$$la = lA + \alpha i. \tag{3}$$

Die übrigen natürlichen Logarithmen von a unterscheiden sich von ihm durch Vielfache von $2\pi i$; zufolge (2) und (3) ist nämlich

$$La = la + 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{4}$$

Ist a reell und positiv, so ist der Hauptwerth von La der reelle natürliche Logarithmus von a. Die sämmtlichen Logarithmen aller anderen Zahlen sind nicht reell. Für negative Zahlen $-a$ $(a > 0)$ hat man

$$l(-a) = la + \pi i, \quad L(-a) = la + (2k+1)\pi i.$$

Die Gleichung

$$e^x = 0$$

hat keine Wurzel; denn nach Formel (17) S. 364 müsste

$$e^\xi \cos\eta = 0, \qquad e^\xi \sin\eta = 0,$$

also $e^\xi = 0$ sein, welcher Gleichung keine endliche reelle Zahl ξ genügt, da e^ξ seiner Erklärung zufolge (VIII. 10) bei jedem reellen Werthe von ξ positiv ist.

7. Sätze über die natürlichen Logarithmen.

In Betreff der soeben erklärten Logarithmen lassen sich auf Grund der Ergebnisse unserer bisherigen Betrachtung die folgenden Sätze nachweisen. Dabei sind alle Logarithmanden als von Null verschieden vorausgesetzt.

1) „Die Summe von je einem Logarithmus einer jeden der Zahlen

$$a_r = A_r(\cos\alpha_r + i\sin\alpha_r) \qquad (-\pi < \alpha_r \leqq \pi;\ r = 1, 2, \cdots p)$$

ist stets ein Logarithmus des Productes dieser Zahlen und umgekehrt lässt sich ein jeder Logarithmus des Productes $a_1 a_2 \cdots a_p$ als Summe von je einem Logarithmus eines jeden Factors darstellen. Es ist also

$$La_1 + La_2 + \cdots + La_p = L(a_1 a_2 \cdots a_p) \tag{1}$$

eine vollkommene Gleichung. Die Gleichung besteht jedoch nicht immer für die Hauptwerthe der Logarithmen.“

Man hat nämlich nach Gleichung (2) S. 365 unter Berücksichtigung des Satzes 1) in VIII. 13 einerseits

$$La_1 + La_2 + \cdots + La_p$$
$$= l(A_1 A_2 \cdots A_p) + \{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p) + 2(k_1 + k_2 + \cdots + k_p)\pi\} i; \tag{2}$$

andererseits ist

$$L(a_1 a_2 \cdots a_p)$$
$$= l(A_1 A_2 \cdots A_p) + \{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p) + 2h\pi\} i, \tag{3}$$

worin $k_1, k_2, \cdots k_p$ und h beliebige ganze rationale Zahlen sein können. Die beiden Werthe (2) und (3) sind dann und nur dann einander gleich, wenn

$$h = k_1 + k_2 + \cdots + k_p$$

ist. Sind $k_1, k_2, \cdots k_p$ gegeben, so giebt es stets einen Werth von h, welcher dieser Bedingung genügt; ist aber umgekehrt h gegeben, so kann man, damit diese Bedingung erfüllt werde, von den Zahlen $k_1, k_2, \cdots k_p$ alle bis auf eine beliebig wählen. — Für die Hauptwerthe der Logarithmen in der Formel (2) ist

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_p = 0.$$

Dies ergiebt aber, da nunmehr $h = 0$ sein muss, in der Formel (3) dann und nur dann den Hauptwerth, wenn

$$-\pi < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p \leqq \pi$$

ist. Bedingungslos ist dies nur dann der Fall, wenn alle Zahlen $a_1, a_2, \cdots a_p$ reell und positiv sind, oder wenn alle mit Ausnahme einer einzigen diese Eigenschaft besitzen.

Besteht die Summe in 1) nur aus den beiden Summanden

$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad b = B(\cos\beta + i\sin\beta), \tag{4}$$

worin α und β zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ ($+\pi$ eingeschlossen) liegen, so ist

$$-2\pi < \alpha + \beta \leqq 2\pi$$

und daher findet man

$$l(ab) = la + lb + \begin{cases} +2\pi i, & \text{falls} \quad \alpha + \beta \leqq -\pi \\ \quad 0, & \quad ,, \quad -\pi < \alpha + \beta \leqq \pi \\ -2\pi i, & \quad ,, \quad \alpha + \beta > \pi \end{cases} \tag{5}$$

ist. Der zweite Fall,

$$l(ab) = la + lb,$$

tritt sicher dann ein, wenn von den Zahlen a, b wenigstens die eine reell und positiv ist, oder wenn die Neigungen von a und b entgegengesetzt bezeichnet sind. Für $b = -1$ ergiebt sich aus (5)

$$l(-a) = la + \pi i \quad \text{oder} \quad l(-a) = la - \pi i,$$

je nachdem $\alpha \leqq 0$, oder aber $\alpha > 0$ ist.

2) „Die Differenz $La - Lb$ ist stets ein Logarithmus von $a:b$ und umgekehrt lässt sich ein jeder Logarithmus von $a:b$ als eine solche Differenz darstellen. Die Gleichung

$$L(a:b) = La - Lb \tag{6}$$

ist demnach eine vollkommene, gilt jedoch nicht immer für die Hauptwerthe der darin vorkommenden Logarithmen.“

Man hat neben der Gleichung (2) auf S. 365

$$Lb = lB + (\beta + 2k'\pi)i,$$

folglich

$$La - Lb = l(A:B) + \{(\alpha - \beta) + 2(k - k')\pi\}i. \tag{7}$$

Andererseits ist

$$L(a:b) = l(A:B) + \{(\alpha - \beta) + 2h\pi\}i. \tag{8}$$

Dabei können h, k, k' beliebige ganze rationale Zahlen sein. Die beiden Ausdrücke (7) und (8) sind dann und nur dann einander gleich, wenn $h = k - k'$ ist, woraus man unmittelbar erkennt, dass die Gleichung (6) vollkommen ist. — Stehen auf der linken Seite von (7) die Hauptwerthe la, lb, so ist $k = 0$, $k' = 0$ und daher muss in diesem Falle, damit die Gleichung (6) Geltung habe, auch $h = 0$ sein. $h = 0$ entspricht aber nur dann dem Hauptwerthe $l(a:b)$, wenn

$$-\pi < \alpha - \beta \leqq \pi$$

ist. Da nun

$$-2\pi < \alpha - \beta < 2\pi$$

ist, so findet man

$$l(a:b) = la - lb + \begin{cases} +2\pi i, & \text{falls} \quad \alpha - \beta \leqq -\pi \\ 0, & \text{„} \quad -\pi < \alpha - \beta \leqq \pi \\ -2\pi i, & \text{„} \quad \alpha - \beta > \pi \end{cases} \tag{9}$$

ist. Es ist daher sicher

$$l(a:b) = la - lb,$$

wenn b reell und positiv ist, und ebenso wenn die Neigungen von a und b gleich bezeichnet sind. Falls a reell und positiv ist, hat man zufolge (9)

$$l(a:b) = la - lb + 2\pi i \quad \text{oder} \quad l(a:b) = la - lb,$$

je nachdem b reell und negativ ist oder nicht.

Zusatz: Jeder Logarithmus des Ausdruckes

$$a_1 a_2 \cdots a_m : b_1 b_2 \cdots b_n$$

unterscheidet sich von der Differenz

$$\sum_1^m {}_r\, la_r - \sum_1^n {}_r\, lb_r$$

nur um ein Vielfaches von $2\pi i$, d. h. es ist

$$L(a_1 a_2 \cdots a_m : b_1 b_2 \cdots b_n) = \sum_1^m {}_r\, la_r - \sum_1^n {}_r\, lb_r + 2h\pi i,$$

worin h jede ganze rationale Zahl vorstellen kann.

3) „Bedeutet m eine natürliche Zahl grösser als 1, so ist jeder Werth von $\frac{1}{m} La$ auch ein solcher von $L \sqrt[m]{*a}$ und umgekehrt. Die Gleichung

$$L \sqrt[m]{*a} = \frac{1}{m} La \tag{10}$$

ist also vollkommen. Insbesondere ist stets

$$l \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} la.“ \tag{11}$$

Zum Beweise des Satzes bezeichnen wir mit k, k' und h beliebige ganze rationale Zahlen, von denen jedoch die erste das Intervall $(0, m-1)$ nicht verlassen soll. Dann ist nach Formel (2) auf S. 355 und (2) auf S. 365

$$L \sqrt[m]{*a} = l \sqrt[m]{A} + \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + 2k'\pi\right) i, \tag{a}$$

ferner zufolge der letztgenannten Formel

$$\frac{1}{m} La = l \sqrt[m]{A} + \frac{\alpha + 2h\pi}{m} i. \tag{b}$$

Die Gleichheit dieser beiden Ausdrücke verlangt, dass $h = k + mk'$ sei. Daraus erkennt man sofort, dass jeder Werth von $L \sqrt[m]{*a}$ auch ein solcher von $\frac{1}{m} La$ ist. Dass aber auch das Umgekehrte gilt, folgt daraus, weil sich jede ganze rationale Zahl h in der Form

$$h = k + mk' \qquad (0 \leqq k < m) \tag{12}$$

darstellen lässt. — Für die Hauptwerthe, und zwar sowohl jenen der Wurzel als auch jene der Logarithmen, ist $k = k' = h = 0$. Durch diese Werthe wird die Beziehung (12) erfüllt, und somit besteht auch die Gleichung (11).

4) „Ist m eine natürliche Zahl grösser als 1, so ist jeder Werth von mLa auch ein Werth von $L(a^m)$ aber nicht umgekehrt; die Gleichung

$$mLa = L(a^m) \tag{13}$$

ist unvollkommen; sie gilt auch nicht immer für die Hauptwerthe der Logarithmen.“

Man hat nämlich neben der ersten der Gleichungen (4), unter h und k ganze rationale Zahlen verstehend,

$$mLa = l(A^m) + (m\alpha + 2mk\pi)i$$

und

$$L(a^m) = l(A^m) + (m\alpha + 2h\pi)i.$$

Diese beiden Ausdrücke sind einander gleich, wenn $h = mk$ ist, was immer zu erreichen ist, falls k, nicht aber immer, falls h gegeben

ist. — Für die Hauptwerthe besteht die Gleichung (13) offenbar dann und nur dann, wenn neben $-\pi < \alpha \leqq \pi$ auch $-\pi < m\alpha \leqq \pi$ ist.

8. Die allgemeine Potenz.

Setzt man, unter $L_1 a$ irgend einen fest gewählten natürlichen Logarithmus von a verstehend,

$$f(x) = e^{x L_1 a},$$

so ist nach Gleichung (18) S. 364

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) \tag{1}$$

und zufolge Nr. 6

$$f(1) = a. \tag{2}$$

Lassen wir nun zunächst $L_1 a$ mit dem Hauptwerthe la zusammenfallen, wodurch

$$f(x) = e^{x la} \tag{3}$$

wird. Für $a = e$ hat man dann wegen $le = 1$

$$f(x) = e^{xle} = e^x.$$

Ist $x = \xi$ reell und

$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad (-\pi < \alpha \leqq \pi),$$

also $la = lA + \alpha i$, so ergiebt sich aus (3) nach Formel (17) S. 364

$$f(\xi) = e^{\xi lA}(\cos\xi\alpha + i\sin\xi\alpha) = A^\xi(\cos\xi\alpha + i\sin\xi\alpha). \tag{4}$$

Falls dabei a reell und positiv, also $\alpha = 0$ und $a = A$ ist, geht diese Gleichung in

$$f(\xi) = A^\xi$$

über. — Ist in der Gleichung (4) $\xi = m$ eine natürliche Zahl, so hat man zufolge (3) S. 352

$$f(m) = A^m(\cos m\alpha + i\sin m\alpha) = a^m.$$

In allen Fällen also, wo die Potenz a^x bisher definirt wurde, fällt e^{xla} mit a^x zusammen. Will man daher den Potenzbegriff auf beliebige Zahlen a und x ($a = 0$ ausgeschlossen) ausdehnen, so hat man nach dem Vorstehenden e^{xla} naturgemäss auch in den Fällen, wo a^x bisher noch nicht definirt erscheint, als eine Potenz der Basis a mit dem Exponenten x aufzufassen und dieselbe mit a^x zu bezeichnen, so dass nunmehr die Gleichung

$$a^x = e^{xla} \tag{5}$$

ganz allgemein mit alleiniger Ausnahme des Falles $a = 0$ besteht.

Die Uebereinstimmung des soeben durch die Gleichung (5) erweiterten Potenzbegriffes mit den früher definirten Potenzen beschränkt sich indessen nicht auf das Bestehen der beiden Gleichungen (1) und (2), d. i.

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \text{und} \quad a^1 = a, \tag{6}$$

sondern man hat, wie bei den reellen Potenzen positiver Zahlen, so auch allgemein zufolge Formel (19) S. 364

$$a^{-x} = e^{-x l a} = \frac{1}{e^{x l a}} = \frac{1}{a^x} \tag{7}$$

und nach Formel (11) S. 369, falls m eine natürliche Zahl bedeutet,

$$a^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m} l a} = e^{l \sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{a}. \tag{8}$$

Gerade diese letzte Gleichung weist aber darauf hin, dass durch die vorstehende Erweiterung der Potenzbegriff noch nicht erschöpft sei. Denn es erscheint offenbar als ein Mangel, dass, während hier der Hauptwerth der m^{ten} Wurzel aus a in der Gestalt einer Potenz von a mit dem Exponenten $\frac{1}{m}$ auftritt, alle übrigen Werthe jener Wurzel von einer solchen Darstellung ausgeschlossen sind. In der That lässt sich dieser Mangel dadurch beheben, dass man jede der Functionen $e^{x L_1 a}$ als eine Potenz von a mit dem Exponenten x erklärt. Hiernach bilden die zu einem bestimmten Werthe von x gehörigen Werthe der Functionen $e^{x L a}$ die allgemeine Potenz von a mit dem Exponenten x. Wir bezeichnen dieselbe nach Cauchy[1]) mit $((a))^x$, so dass nunmehr

$$((a))^x = e^{x L a} = e^{x l a} \cdot e^{2 k x \pi i} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{9}$$

ist. Insbesondere hat man nun wegen $l e = 1$

$$((e))^x = e^{x L e} = e^x \cdot e^{2 k x \pi i}.$$

Die durch die Gleichung (5) definirte Function a^x heisst der Hauptwerth der Potenz $((a))^x$.

Die allgemeine Potenz $((a))^x$ ist zufolge der Gleichung (9) und der Formel (20) S. 365 eindeutig, wenn x eine ganze rationale Zahl, m-deutig, falls x eine rationale Zahl ist, welche in reducirter Form den Nenner m hat. In allen anderen Fällen ist $((a))^x$ unendlich vieldeutig. Zufolge (9) und (5) unterscheidet sich jeder Werth von $((a))^x$ von dem Hauptwerthe a^x nur durch einen Factor $e^{2 k x \pi i}$, worin k jede ganze rationale Zahl sein kann.

Ist $x = \frac{n}{m}$, wobei n und m zwei theilerfremde natürliche Zahlen bedeuten sollen, und setzt man

$$a = A(\cos\alpha + i \sin\alpha) \qquad (-\pi < \alpha \leqq \pi),$$

so hat man zufolge (9) mit Rücksicht auf die Formeln (2) S. 365 und (17) S. 364

1) Cours d'Analyse VII. § 1.

$$((a))^{\frac{n}{m}} = e^{\frac{n}{m} La} = e^{\frac{n}{m} lA} \cdot e^{\frac{n}{m}(\alpha + 2k\pi)i}$$

$$= A^{\frac{n}{m}} \left\{ \cos\frac{n}{m}(\alpha + 2k\pi) + i \sin\frac{n}{m}(\alpha + 2k\pi) \right\}$$

und somit nach Formel (3) S. 352 und (2) S. 355

$$((a))^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{*a})^n. \tag{10}$$

Diese Gleichung ist vollkommen, da die beiden Ausdrücke links und rechts vom Gleichheitszeichen gleich viele, nämlich m verschiedene Werthe besitzen. Insbesondere ist noch, wie man aus dem Vorstehenden unmittelbar ersieht,

$$a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a})^n. \tag{11}$$

Für $n = 1$ gewinnt man aus (10) die vollkommene Gleichung

$$((a))^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{*a}. \tag{12}$$

Es entspricht also jedem Werthe von $((a))^{\frac{1}{m}}$ ein ihm gleicher Werth von $\sqrt[m]{*a}$ und umgekehrt. Somit haben wir durch Einführung der allgemeinen Potenz $((a))^x$ in der Entwickelung des Potenzbegriffes hinsichtlich einer jeden von Null verschiedenen Basis den naturgemässen Abschluss erreicht.

Die Basis 0 erscheint bei der vorstehenden Darstellung der Potenzen ausgeschlossen, da es von der Zahl 0 keinen Logarithmus giebt. Dieser letztere Umstand bildet indessen keinen hinreichenden Grund dafür, die Null als Basis einer Potenz überhaupt für unzulässig zu erklären. In der That haben wir schon in VIII. 10 die Potenz $0^\xi = 0$ mit reellem und positivem Exponenten ξ eingeführt, und es liegt kein Hinderniss vor, für alle Exponenten $x = \xi + \eta i$, in denen $\xi > 0$ ist, $0^x = 0$ zu setzen; denn es wird dadurch dem Grundgesetze aller Potenzen, der Formel (1), entsprochen. Dies ist aber auch die einzige zulässige Definition der Potenz $0^{\xi+\eta i}$ $(\xi > 0)$. Denn soll $0^{\xi+\eta i}$ für alle Werthe $\xi + \eta i$ $(\xi > 0)$ definirt sein und dabei die Gleichung $0^{\xi+\eta i} \cdot 0^{\xi'+\eta' i} = 0^{(\xi+\xi')+(\eta+\eta')i}$ bestehen, so hat man für $0 < \varepsilon < \xi$ wegen $0^\varepsilon = 0$

$$0^{\xi+\eta i} = 0^\varepsilon \cdot 0^{(\xi-\varepsilon)+\eta i} = 0.$$

Nehmen wir an, es sei auch $0^{\eta i}$ wenigstens für einen bestimmten Werth von η definirt, dann muss zufolge (1) für $\xi > 0$

$$0 = 0^{\xi+\eta i} = 0^\xi \cdot 0^{\eta i} = 0 \cdot 0^{\eta i}$$

sein. Diese Bedingung ist aber erfüllt, welchen Werth auch immer man der Potenz $0^{\eta i}$ zuschreiben mag. Es bleibt demnach $0^{\eta i}$ völlig unbestimmt.

Dagegen erklären wir die Potenz $0^{-\xi+\eta i}$ $(\xi > 0)$ aus dem Grunde für unzulässig, weil der Gleichung

$$0^{\xi - \eta i} \cdot y = 1, \quad \text{d. i.} \quad 0 \cdot y = 1$$

keine Zahl y entspricht, während für jede von 0 verschiedene Basis a

$$a^{\xi - \eta i} \cdot a^{-\xi + \eta i} = 1$$

ist.

9. Sätze über die allgemeinen Potenzen.

Ausser den bereits in der vorigen Nummer angeführten Sätzen bestehen hinsichtlich der allgemeinen Potenzen noch die folgenden:

1) „Die Gleichung

$$(\!(a)\!)^{-x} = 1 : (\!(a)\!)^{x} \tag{1}$$

ist vollkommen und gilt auch stets für die Hauptwerthe.“

Denn man hat zufolge der Formeln (9) S. 371 und (19) S. 364

$$(\!(a)\!)^{-x} = e^{-xLa} = 1 : e^{xLa} = 1 : (\!(a)\!)^{x},$$

worin je zwei Glieder unter sich eine vollständige Gleichung bilden. Dass die Gleichung (1) für die Hauptwerthe der beiden Potenzen bestehe, wurde schon in der vorigen Nummer, Formel (7) S. 371 gezeigt.

2) „Die beiden Gleichungen

$$(\!(a)\!)^{x} \cdot (\!(b)\!)^{x} = (\!(ab)\!)^{x}, \quad (\!(a)\!)^{x} : (\!(b)\!)^{x} = \left(\!\!\left(\frac{a}{b}\right)\!\!\right)^{x} \tag{2}$$

sind vollkommen, gelten aber nicht immer für die Hauptwerthe der Potenzen.“ — Mit Hilfe der Formeln (9) S. 371, (18) S. 364 und des Satzes 1) in Nr. 7 findet man nämlich

$$(\!(a)\!)^{x} \cdot (\!(b)\!)^{x} = e^{xLa} \cdot e^{xLb} = e^{x(La + Lb)} = e^{xL(ab)} = (\!(ab)\!)^{x},$$

und zwar stehen hier lauter vollkommene Gleichungen; demnach ist auch die erste der Gleichungen (2) vollkommen. Ebenso beweist man die zweite mit Hilfe des Satzes 2) in Nr. 7. Die beiden Sätze 1) und 2) in Nr. 7 besagen aber auch, dass die Gleichungen (2) nicht immer für die Hauptwerthe der Potenzen gelten können; so ist z. B.

$$(1 : a)^{x} = 1 : a^{x}$$

ausgenommen den Fall, wo a reell und negativ ist.

3) „Es bestehen die beiden Gleichungen

$$(\!(a)\!)^{x+y} = (\!(a)\!)^{x} \cdot (\!(a)\!)^{y}, \tag{3}$$

$$(\!(a)\!)^{x-y} = (\!(a)\!)^{x} : (\!(a)\!)^{y}. \tag{4}$$

Dieselben sind im allgemeinen unvollkommen, gelten jedoch stets für die Hauptwerthe der Potenzen.“ Hinsichtlich der Gleichung (3) hat man nach Formel (9) S. 371

$$(\!(a)\!)^{x+y} = e^{(x+y)La} = e^{xLa} \cdot e^{yLa} = (\!(a)\!)^{x} \cdot (\!(a)\!)^{y};$$

es ist somit jeder Werth von $(\!(a)\!)^{x+y}$ auch ein Werth des Productes

$(\!(a)\!)^x \cdot (\!(a)\!)^y$. Denkt man sich nun unter $(\!(a)\!)^x$ und $(\!(a)\!)^y$ irgend zwei solche Werthe der entsprechenden allgemeinen Potenzen, welche durch denselben Logarithmus von a definirt sind, so ist ihr Product stets demjenigen Werthe von $(\!(a)\!)^{x+y}$ gleich, welcher durch eben denselben Logarithmus von a definirt ist. Sind dagegen $(\!(a)\!)^x$ und $(\!(a)\!)^y$ zwei Werthe, die nicht demselben Logarithmus von a angehören, so braucht ihrem Producte kein ihm gleicher Werth von $(\!(a)\!)^{x+y}$ zu entsprechen. Denn es ist

$$(\!(a)\!)^x \cdot (\!(a)\!)^y = e^{x(la+2m\pi i)+y(la+2n\pi i)} = a^{x+y} \cdot e^{2(mx+ny)\pi i};$$

der hier hinter dem letzten Gleichheitszeichen stehende Ausdruck ist aber, da die Function e^x die Periode $2\pi i$ besitzt, dann und nur dann ein Werth von $(\!(a)\!)^{x+y}$, wenn es zwei ganze rationale Zahlen k und q giebt, welche die Gleichung

$$mx + ny = k(x+y) + q \tag{5}$$

befriedigen. Solche Zahlen k, q existiren aber beispielsweise nicht für beliebige Werthe m, n, wenn $x+y$ eine ganze rationale Zahl ist, während x und y diese Eigenschaft nicht besitzen. Die Gleichung (3) ist demnach im Allgemeinen unvollkommen. Vollkommen ist sie jedoch stets dann, wenn von den Exponenten x, y mindestens der eine reell und ganzzahlig ist, was sich aus der Bedingungsgleichung (5) unmittelbar erkennen lässt. — Dass die Gleichung (3) für die Hauptwerthe der Potenzen Geltung habe, wurde schon in der vorigen Nummer, Formel (6) gezeigt.

Die Gleichung (4) folgt aus (3), indem man in (3) y durch $-y$ ersetzt und hierauf den Satz 1) anwendet.

4) „Jeder Werth von xLa ist stets ein Logarithmus eines Werthes von $(\!(a)\!)^x$, umgekehrt kann jedoch dann und nur dann jeder Logarithmus eines jeden Werthes von $(\!(a)\!)^x$ auf die Form xLa gebracht werden, wenn der Exponent x ein reeller (positiver oder negativer) Stammbruch ist. Die Gleichung

$$xLa = L(\!(a)\!)^x \tag{6}$$

ist also im Allgemeinen unvollkommen; vollkommen dann und nur dann, wenn $x = 1:q$, unter q eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl verstanden, ist; sie gilt auch nicht immer für die Hauptwerthe der Potenz und der Logarithmen.“

Beweis: Nach Formel (9) S. 371 ist

$$(\!(a)\!)^x = e^{xLa}.$$

Setzt man hierin $x = \xi + \eta i$,

$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad (-\pi < \alpha \leq \pi), \qquad La = lA + \alpha' i,$$

worin α' anstatt $\alpha + 2k\pi$ steht, so hat man

$$xLa = \xi lA - \eta\alpha' + (\xi\alpha' + \eta lA)i. \tag{7}$$

Demnach ist

$$((a))^x = e^{\xi lA - \eta\alpha'}\{\cos(\xi\alpha' + \eta lA) + i\sin(\xi\alpha' + \eta lA)\},$$

also zufolge Formel (2) S. 365

$$L((a))^x = (\xi lA - \eta\alpha') + \{(\xi\alpha' + \eta lA) + 2m\pi\}i$$

und im Hinblicke auf (7)

$$L((a))^x = xLa + 2m\pi i \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{8}$$

Ist nun xLa gegeben, so braucht man nur $L((a))^x$ dem Werthe $m = 0$ entsprechend zu wählen, um die Gleichung (6) zu befriedigen. Ist dagegen $L((a))^x$ gegeben, so giebt es zufolge (8) dann und nur dann einen ihm gleichen Werth von xLa, wenn die Gleichung

$$nx = m \tag{9}$$

durch eine ganze rationale Zahl n erfüllbar ist. Somit ist die Gleichung (6) stets unvollkommen, wenn x reell und irrational oder nicht-reell ist; denn in diesen beiden Fällen besitzt die Gleichung (9) nur für den einzigen Werth $m = 0$ eine Auflösung nach n, nämlich $n = 0$. Ist aber x rational, also $x = p : q$, worin p, q zwei ganze rationale, theilerfremde Zahlen bedeuten, von denen wir $p > 0$ voraussetzen, so ist nach (9)

$$np = mq. \tag{10}$$

Dieser Gleichung genügt, wenn man $m = 1$ wählt, nur dann eine ganze Zahl n, wenn $p = 1$ ist. Falls jedoch $x = 1 : q$ ist, hat man nach (10) $n = mq$, so dass n für jeden Werth von m ganzzahlig ausfällt. In diesem Falle ist also die Gleichung (6) vollkommen (vgl. Satz 3) in Nr. 7). — Bezüglich der Hauptwerthe hat man nach (7)

$$xla = \xi lA - \eta\alpha + (\xi\alpha + \eta lA)i \tag{11}$$

und somit

$$a^x = e^{xla} = e^{\xi lA - \eta\alpha}\{\cos(\xi\alpha + \eta lA) + i\sin(\xi\alpha + \eta lA)\}; \tag{12}$$

es ist daher dann und nur dann

$$xla = l(a^x),$$

wenn $-\pi < \xi\alpha + \eta lA \leqq \pi$ ist. Stets ist dies der Fall, wenn x reell und seinem Betrage nach kleiner als 1 ist, ebenso wenn bei beliebigem reellen x die Zahl a reell und positiv ist. — Allgemein ist nach (12)

$$l(a^x) = \xi lA - \eta\alpha + \{(\xi\alpha + \eta lA) + 2d\pi\}i, \tag{13}$$

worin die ganze rationale Zahl d so gewählt ist, dass

$$-\pi < (\xi\alpha + \eta lA) + 2d\pi \leqq \pi$$

ist. Man hat daher zufolge (11) und (13) allgemein

$$l(a^x) = xla + 2d\pi i. \tag{14}$$

5) „Die Gleichung

$$((a))^{xy} = ((((a))^x))^y \tag{15}$$

ist im Allgemeinen unvollkommen. Vollkommen ist dieselbe stets dann, wenn die beiden Exponenten x, y rational und ganzzahlig sind; desgleichen bei beliebigem x, wenn $y = 0$ ist; ebenso bei beliebigem y, wenn x ein reeller (positiver oder negativer) Stammbruch ist. Auch gilt die vorstehende Gleichung nicht immer für die Hauptwerthe der Potenzen."

Man hat nämlich zufolge (9) S. 371 im Hinblicke auf den Satz 4)

$$((a))^{xy} = e^{xyLa} = e^{yL((a))^x} = ((((a))^x))^y.$$

Es ist somit jeder Werth von $((a))^{xy}$ auch ein solcher von $((((a))^x))^y$ und ebenso von $((((a))^y))^x$. Umgekehrt hat man zunächst

$$((((a))^x))^y = e^{yL((a))^x}$$

und daher zufolge (8)

$$((((a))^x))^y = e^{xyLa + 2my\pi i},$$

also mit Rücksicht auf die Formel (4) S. 366

$$((((a))^x))^y = e^{xyla + 2y(kx+m)\pi i}. \tag{16}$$

Dagegen ist

$$((a))^{xy} = e^{xyLa} = e^{xyla + 2hxy\pi i}. \tag{17}$$

In den beiden vollkommenen Gleichungen (16) und (17) können die Buchstaben k, m und h unabhängig von einander jede ganze rationale Zahl vorstellen. Soll demnach jeder Werth von $((((a))^x))^y$ auch ein Werth von $((a))^{xy}$ sein, so muss es zufolge (16) und (17), da die Exponentialfunction die Periode $2\pi i$ besitzt, zu jedem Werthepaare k, m zwei ganze rationale Zahlen h, p geben, welche die Gleichung

$$\{(h-k)x - m\}y = p \tag{18}$$

erfüllen. Dieses trifft stets zu, wenn $y = 0$ ist, ebenso wenn x und y rational und ganzzahlig sind, oder wenn x ein reeller Stammbruch ist. In den ersten beiden Fällen kann man h beliebig annehmen, um die Gleichung (18) zu erfüllen. Im dritten Falle, wo $x = 1 : q$ ist, genügen ihr die Werthe $h = mq + k$ und $p = 0$. Dagegen lässt sich die genannte Gleichung nicht für alle Werthepaare k, m befriedigen, wenn z. B. $x = 0$ und y keine ganze rationale Zahl ist; desgleichen wenn x rational aber kein Stammbruch ist, während y irrational oder complex ist; ebenso wenn das Product xy rational, dagegen y irrational ist. Die Gleichung (15) ist somit im Allgemeinen unvollkommen. — Was endlich noch die Hauptwerthe betrifft, so ergiebt sich aus der Formel (14) unmittelbar

$$e^{yl(a^x)} = e^{xyla + 2dy\pi i}, \quad \text{d. i.} \quad (a^x)^y = a^{xy} \cdot e^{2dy\pi i}.$$

Die Gleichung
$$(a^x)^y = a^{xy}$$
besteht somit sicher, wenn $d = 0$, d. h. nach (14), wenn $l(a^x) = x l a$ ist. Sie gilt aber zufolge der Formel (20) S. 365 ausserdem noch in allen Fällen, wo dy eine ganze rationale Zahl, also y selbst eine solche Zahl oder aber ein Bruch ist, dessen reducirter Nenner d oder ein Theiler von d ist. In allen übrigen Fällen ist dieselbe ungiltig.

Uebungen zum XII. Abschnitt.

Zunächst werden die Uebungen 1)—3), 6), 13)—15) zum VIII. Abschnitte unter der Voraussetzung wiederholt, dass die Zahlen a, b, x, x', m auch complexe Werthe annehmen dürfen. — Hierzu fügen wir die folgenden Aufgaben.

1) Dehnt man den in X. 10 für complexe Basen und natürliche Exponenten erklärten Potenzbegriff in der Weise auf ganze rationale Exponenten aus, dass man
$$a^0 = 1, \quad a^{-m} = 1 : a^m$$
setzt, so ist auch für negative Werthe von m neben
$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad a^m = A^m(\cos m\alpha + i\sin m\alpha),$$
und es bleiben die Formeln
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (ab)^m = a^m b^m, \quad (a:b)^m = a^m : b^m,$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
für beliebige rationale und ganzzahlige Exponenten m, n erhalten.

Setzt man
$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad (-\pi < \alpha \leqq \pi), \tag{1}$$
$$b = B(\cos\beta + i\sin\beta) \qquad (-\pi < \beta \leqq \pi), \tag{2}$$
so bestehen die folgenden Gleichungen:

2) $$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right)$$
$$(-\pi < \alpha + \beta + 2k\pi \leqq \pi).$$

3) $$\sqrt[m]{a:b} = \left(\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right)$$
$$(-\pi < \alpha - \beta + 2k\pi \leqq \pi).$$

4) $$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right)$$
$$(-\pi < n\alpha + 2k\pi \leqq \pi).$$

5) $$\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}\left\{\cos\frac{2(h-pk)\pi}{mp} + i\sin\frac{2(h-pk)\pi}{mp}\right\}$$
$$(-\pi < n\alpha + 2k\pi \leqq \pi, \quad -\pi < np\alpha + 2h\pi \leqq \pi).$$

In den vorstehenden Gleichungen 2)—5) bedeuten h und k ganze rationale Zahlen, welche durch die beigefügten Ungleichungen vollkommen bestimmt sind. Behufs Beweises der Formel 5) wende man die Formel 4) sowohl auf $\sqrt[mp]{a^{np}}$ als auch auf $\sqrt[m]{a^n}$ an und beachte hierauf den Satz 2) in XII. 4.

6) „Hat die complexe Function $w(n)$ bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0, so ist

$$\lim_{n=+\infty} \left\{1 + \frac{w(n)}{n}\right\}^n = 1.\text{“}$$

(Vgl. VIII. 14, 2. Satz.) Man setze $w(n) = \varphi(n) + i\psi(n)$, unter $\varphi(n)$ und $\psi(n)$ reelle Functionen von n verstanden, so dass

$$\lim \varphi(n) = \lim \psi(n) = 0$$

ist. Hierauf setze man

$$1 + \frac{\varphi(n)}{n} = \varrho_n \cos \vartheta_n, \quad \psi(n) = \varrho_n \sin \vartheta_n$$

und verfahre ähnlich wie beim Beweise der Formel (15) in XII. 5.

7) „Hat die complexe Function $v(n)$ bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth a, so ist

$$\lim_{n=+\infty} \left\{1 + \frac{v(n)}{n}\right\}^n = e^a.\text{“} \tag{3}$$

(Vergl. VIII. 14, 5. Satz.) Anleitung: Man hat

$$\left\{1 + \frac{v(n)}{n}\right\}\left(1 - \frac{a}{n}\right) = 1 + \frac{\psi(n)}{n},$$

worin

$$\psi(n) = v(n) - a - av(n) : n,$$

also

$$\lim_{n=+\infty} \psi(n) = 0$$

ist.

7*) Eine Anwendung der Formel (3) bildet die nachstehende von Euler benutzte (s. S. 361 Note). Nach der Moivre'schen Formel ist

$$\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n.$$

Setzt man $n\alpha = \eta$ (unter η eine von n unabhängige reelle Zahl verstanden), so ergiebt sich daraus die Gleichung

$$\cos \eta + i \sin \eta = \left(\cos \frac{\eta}{n} + i \sin \frac{\eta}{n}\right)^n.$$

Nun ist zu zeigen, dass

$$\lim_{n=+\infty} \left\{\cos \frac{\eta}{n} + i \sin \frac{\eta}{n}\right\}^n = e^{\eta i}$$

ist.

8) $\quad l(a^m) = mla + 2k\pi i \quad (-\pi < ma + 2k\pi \leqq \pi);$

hierin bedeutet m eine natürliche, k eine ganze rationale Zahl.

9) „Sind a und $\bar{a}$ einerseits, x und $\bar{x}$ andererseits complex-conjugirte Zahlen, so sind auch die Hauptwerthe a^x und $\bar{a}^{\bar{x}}$ einander conjugirt.“

Bezüglich der Hauptwerthe der Potenzen bestehen noch die folgenden zwei Sätze:

10)
$$(ab)^x = a^x b^x e^{\mu x i};$$

darin ist $\mu = 2\pi$ oder 0 oder -2π, je nachdem neben den Gleichungen (1) und (2) die Beziehung $\alpha + \beta \leqq -\pi$ oder $-\pi < \alpha + \beta \leqq \pi$ oder $\alpha + \beta > \pi$ stattfindet.

Man vergleiche Formel (5) in XII. 7.

11)
$$(a : b)^x = (a^x : b^x)\, e^{\mu x i};$$

hierin hat μ den Werth 2π oder 0 oder -2π, je nachdem neben den Gleichungen (1) und (2) die Beziehung $\alpha - \beta \leqq -\pi$ oder $-\pi < \alpha - \beta \leqq \pi$ oder $\alpha - \beta > \pi$ besteht.

Man vergleiche Formel (9) in XII. 7.

12) Wie löst sich das bekannte Paradoxon von Catalan (Nouv. Ann. 2. VIII. p. 456), nach welchem aus

$$e^{2m\pi i} = e^{2n\pi i},$$

worin m und n zwei von einander verschiedene, ganze rationale Zahlen bedeuten, durch beiderseitige Potenzirung mit dem Exponenten $\frac{1}{2}i$

$$e^{-m\pi} = e^{-n\pi}$$

hervorgehen soll?

13) Die Gleichung

$$b = ((a))^x,$$

worin a von 0 und 1, b von 0 verschieden ist, hat die Wurzeln

$$x = Lb : La.$$

14) Die Gleichung

$$b = ((x))^a$$

besitzt die Wurzeln

$$x = e^{Lb : a}.$$

15) Die Gleichung

$$b = ((x))^m,$$

worin m eine von 1 verschiedene natürliche Zahl sein soll, hat die Wurzeln

$$x = \sqrt[m]{{}^*b}.$$

16) Auch bei complexem a gilt die Formel

$$\lim_{n=+\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = la.$$

Leicht zu beweisen mittelst der Formeln (3) S. 356, (3) S. 366 und (24) S. 220.

Allgemein ist, unter k eine feste ganze Zahl verstanden,

$$\lim_{n=+\infty} n\left(\sqrt[n]{a} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}} - 1\right) = la + 2k\pi i.$$

17) Die Formel

$$l\left(\frac{x-a}{x-b}\right) = l(x-a) - l(x-b)$$

gilt für alle Punkte x, welche ausserhalb des Streifens der x-Ebene liegen, der von der Strecke ab und den Halbstrahlen, die von den Punkten a, b parallel zur negativen reellen Axe gezogen sind, begrenzt ist. Dabei soll die Strecke ab nicht der reellen Axe parallel sein. In den Punkten innerhalb des erwähnten Streifens gilt die Formel nicht. Was ist hinsichtlich derselben zu bemerken, falls der Punkt x der Begrenzung des Streifens angehört und falls die Strecke ab reell ist? — Anleitung: Sinngemässe Anwendung der Formel (3) S. 351.

18) Die Formel

$$l\left(\frac{a-x}{b-x}\right) = l\left(1-\frac{a}{x}\right) - l\left(1-\frac{b}{x}\right)$$

gilt, wenn x einen Punkt ausserhalb des Dreiecks Oab, nicht aber, wenn x einen innerhalb desselben bedeutet; wobei angenommen ist, dass der Nullpunkt O und die Punkte a, b nicht in einer Geraden liegen. Was ist hinsichtlich dieser Formel zu bemerken, falls der Punkt x dem Umfange des genannten Dreiecks angehört und falls die drei Punkte O, a, b in einer Geraden liegen?

19) „Bezeichnen a, b ungleiche complexe Zahlen und ist $|a| \geqq |b|$, so hat man für jede natürliche Zahl $m \geqq 2$

$$|a^m - b^m| < m\,|a-b|\,|a|^{m-1}.\text{“}$$

Hierzu gebraucht man den Satz, dass bei von 0 verschiedenem x $|\sin mx : \sin x| < m$ ist, welcher durch den Schluss von m auf $m+1$ gezeigt wird.

20) Unter welchen Umständen gelten die vier Formeln

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} = \sqrt{a \pm \sqrt{b}},$$

unter der Voraussetzung, dass die Zahlen a, b complex sein dürfen?

XIII. Abschnitt.

Unendliche Reihen mit complexen Gliedern.

1. Grenzwerth einer complexen Function von n bei $\lim n = +\infty$.
Die Erklärung des endlichen Grenzwerthes einer complexen Function $f(n)$ der natürlichen Zahl n bei $\lim n = +\infty$ ist gleichlautend mit der des Grenzwerthes einer reellen Function von n auf S. 161. Die Formel

$$\lim_{n=+\infty} f(n) = a \tag{1}$$

besagt also genau, dass jeder beliebig gegebenen positiven Zahl ε eine solche Zahl μ sich so zuordnen lässt, dass wenn nur $n > \mu$ ist, dann stets

$$|f(n) - a| < \varepsilon \tag{2}$$

ist.

Diese Erklärung stimmt überein mit der auf S. 362 aufgestellten. Bezeichnet man die Coordinaten von $f(n)$ mit $\varphi(n)$, $\psi(n)$, die von a mit α, β, so dass

$$f(n) = \varphi(n) + \psi(n)i, \quad a = \alpha + \beta i$$

ist, so kann man nämlich aus der Formel (1) folgern, dass die reellen Functionen $\varphi(n)$, $\psi(n)$ bei $\lim n = +\infty$ bezw. die endlichen Grenzwerthe α, β besitzen. Umgekehrt ergiebt sich aus der letzteren Annahme, dass die complexe Function bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth $\alpha + \beta i$ hat. — Um den ersten Theil dieser Behauptung zu erweisen, braucht man nur die Ungleichung (2) so zu schreiben:

$$\sqrt{(\varphi(n) - \alpha)^2 + (\psi(n) - \beta)^2} < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > \mu.$$

Demnach ist unter der nämlichen Voraussetzung über n

$$|\varphi(n) - \alpha| < \varepsilon, \quad |\psi(n) - \beta| < \varepsilon, \tag{3}$$

d. h. es bestehen die Formeln

$$\lim_{n=+\infty} \varphi(n) = \alpha, \quad \lim_{n=+\infty} \psi(n) = \beta.$$

Geht man umgekehrt von den Ungleichungen (3) aus, so findet man, dass neben $n > \mu$

$$|f(n) - a| = \sqrt{(\varphi(n) - \alpha)^2 + (\psi(n) - \beta)^2} < \varepsilon\sqrt{2}$$

sein muss. $\varepsilon\sqrt{2}$ kann jede beliebige positive Zahl sein; daher gilt jetzt die Formel (1).

Man darf an Stelle der rechtwinkligen auch die Polarcoordinaten gebrauchen. Bringt man $f(n)$ auf die trigonometrische Form, d. h. setzt

$$f(n) = \varrho(n)\{\cos\theta(n) + i\sin\theta(n)\}, \qquad -\pi < \theta(n) \leq \pi$$

und ist bekannt, dass $\varrho(n)$ und $\theta(n)$ bei $\lim n = +\infty$ je einen endlichen Grenzwerth ϱ, θ besitzen, so hat $f(n)$ bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth $\varrho\{\cos\theta + i\sin\theta\}$.[1]) Denn wir haben bei $\lim n = +\infty$

$$\lim\cos\theta(n) = \cos\theta, \qquad \lim\sin\theta(n) = \sin\theta$$

[der Beweis dieser Formeln ist der nämliche, wie der der Formeln (13) und (14) auf S. 364], somit

$$\lim\varrho(n)\cos\theta(n) = \varrho\cos\theta, \qquad \lim\varrho(n)\sin\theta(n) = \varrho\sin\theta.$$

Auch die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die complexe Function $f(n)$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth besitzt, ist die nämliche wie für eine reelle Function von n. Soll $f(n)$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth besitzen, so ist nothwendig und hinreichend, dass jeder positiven Zahl ε eine andere μ so entspricht, dass wenn nur $n > \mu$ ist,

$$|f(n+r) - f(n)| < \varepsilon \tag{4}$$

ist, was r auch für eine natürliche Zahl sein mag. Eine solche Function von n heisse wieder convergent.

Die Nothwendigkeit dieser Bedingung erhellt in der nämlichen Weise, wie die der entsprechenden in VII. 13 bezw. 2. Dass sie hinreicht, erkennen wir aus ihr, indem wir

$$f(n+r) - f(n) = \varphi(n+r) - \varphi(n) + (\psi(n+r) - \psi(n))\,i$$

setzen. Aus der Ungleichung (4) ergiebt sich dann ganz so, wie aus (1) die Ungleichungen (3) gefolgert werden, dass neben $n > \mu$

$$|\varphi(n+r) - \varphi(n)| < \varepsilon, \qquad |\psi(n+r) - \psi(n)| < \varepsilon$$

sein muss, was r auch für eine natürliche Zahl sein mag. Es hat somit bei $\lim n = +\infty$ sowohl $\varphi(n)$ einen endlichen Grenzwerth α, als auch $\psi(n)$ einen, β. $\alpha + \beta i$ ist nun der Grenzwerth von $f(n)$ bei $\lim n = +\infty$.

Für die Grenzwerthe von complexen Functionen von n gelten ebenfalls die Sätze 1)—4) in VII. 14 (bezw. 3) und zwar bleiben die Beweise ungeändert.

2. Convergente und divergente Reihen.

Weitaus am häufigsten treten complexe Functionen von n bei dem nachstehenden Anlasse auf.

---

1) Umkehrung s. S. 394 Uebung 10).

Es sei eine endlose Folge von beliebigen Zahlen

$$a_0,\ a_1,\ a_2 \cdots a_n \cdots$$

vorgelegt. Wenn wir die Partialsummen

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \cdots,$$

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_0^n {}^p a_p$$

bilden, so kann s_n beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$, wobei n alle ganzen Zahlen von Null an zu durchlaufen hat, einen endlichen Grenzwerth a haben oder nicht. Im ersten Falle heisst die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{1}$$

convergent, im zweiten divergent.

Wir sagen demnach, dass die unendliche Reihe (1) convergirt und a ihr Grenzwerth ist, wenn zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl μ so gehört, dass für alle Werthe von n grösser als μ

$$|s_n - a| < \varepsilon \tag{2}$$

ist. Daraus folgt, dass wenn jedes Glied von (1) in seinen reellen und imaginären Theil zerlegt wird:

$$a_n = \alpha_n + \beta_n i,$$

auch die ersteren, sowie die letzteren eine convergente Reihe bilden müssen. Denn ist

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \sigma_n, \quad \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_n = \tau_n,$$

so hat man

$$s_n = \sigma_n + \tau_n i,$$

folglich, wenn $a = \alpha + \beta i$ gesetzt wird, nach Nr. 1

$$\lim_{n=+\infty} \sigma_n = \alpha, \quad \lim_{n=+\infty} \tau_n = \beta. \tag{3}$$

Um sogleich Beispiele von convergenten und divergenten Reihen zu geben, berufen wir uns wieder auf die in IX. 1 aufgeführten drei besonderen Reihen, jetzt natürlich unter der Voraussetzung, dass ihre Glieder complexe Zahlen sind, dann gelten neuerdings die a. a. O. gegebenen Sätze und zwar werden sie, was den Fall der Convergenz betrifft, ganz in derselben Weise begründet, wie dort. Wir beschränken uns darauf, die genannten Sätze für die wichtigste von den drei Reihen, die geometrische, zu wiederholen.

Die unendliche geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + \cdots$$

convergirt dann und nur dann, wenn x dem absoluten Be-

trage nach kleiner als 1 ist und zwar ist ihr Grenzwerth $1:(1-x)$. — Dass die genannte Reihe für jedes x, dessen Betrag kleiner als 1 ist, convergirt, wird genau so, wie auf S. 228 bewiesen.

Denkt man sich in der Gleichung

$$1+x+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x} \qquad (|x|<1) \tag{a}$$

x in der trigonometrischen Form, also $x=\varrho(\cos\theta+i\sin\theta)$, wobei $\varrho<1$ sein soll, so kann man ihre beiden Seiten in den reellen und imaginären Theil zerlegen, wodurch man zwei neue reelle Formeln erhält. Es ist $x^n=\varrho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ und

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-\varrho\cos\theta)-i\varrho\sin\theta}=\frac{(1-\varrho\cos\theta)+i\varrho\sin\theta}{1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2}.$$

Da sowohl die reellen Theile auf den beiden Seiten der Gleichung (a), als auch die Coefficienten von i einander gleich sein müssen, so ergeben sich die beiden Formeln

$$1+\varrho\cos\theta+\cdots+\varrho^n\cos n\theta+\cdots=\frac{1-\varrho\cos\theta}{1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2} \tag{b}$$

$$(0\leqq\varrho<1)$$

$$\sin\theta+\varrho\sin 2\theta+\cdots+\varrho^{n-1}\sin n\theta+\cdots=\frac{\sin\theta}{1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2}. \tag{c}$$

Die Formeln (b) und (c) gelten indess auch, wenn man ϱ durch eine complexe Zahl r, deren Betrag kleiner als 1 ist, ersetzt. Auch diese Bemerkung ergiebt sich aus der Gleichung (a). Man braucht nur darin zuerst $x=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, hierauf $x=r(\cos\theta-i\sin\theta)$ zu setzen, wobei man sich $|r|<1$ zu denken hat, und die beiden so erhaltenen Gleichungen zu addiren und zu subtrahiren. Dabei kommt freilich schon einer von den in Nr. 4 erwähnten Sätzen zur Anwendung.

Ist $X=|x|$ grösser als 1 oder gleich 1, so divergirt die unendliche geometrische Reihe, d. h. ihre Partialsumme

$$s_n=1+x+\cdots+x^n$$

hat bei $\lim n=+\infty$ keinen endlichen Grenzwerth, und zwar hat, falls $X>1$ ist, der absolute Betrag von

$$s_n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \tag{d}$$

bei $\lim n=+\infty$ den Grenzwerth $+\infty$. Denn es ist

$$|s_n|>\frac{X^{n+1}-1}{X+1},$$

somit wenn jetzt $X=1+d$ $(d>0)$ gesetzt wird, nach 4) in VIII. 2

$$|s_n|>\frac{(n+1)d}{2+d}.$$

Die rechte Seite ist grösser als eine beliebig gegebene Zahl γ, wenn nur

$$n + 1 > (2 + d)\gamma : d$$

angenommen wird.

Ist x eine complexe Zahl vom Betrage 1 ausser 1 selbst, so bleibt $|s_n|$ zwar endlich. Denn nach der Formel (d) ist

$$|s_n| = \frac{|x^{n+1} - 1|}{|x - 1|} \leqq \frac{|x|^{n+1} + 1}{|x - 1|} = \frac{2}{|x - 1|}.$$

Gleichwohl hat s_n bei $\lim n = +\infty$ keinen Grenzwerth. Dies ergiebt sich nach einer Bemerkung in der nächsten Nummer daraus, dass das allgemeine Glied der geometrischen Reihe x^n jetzt bei beliebigem n den Betrag 1 hat, also bei $\lim n = +\infty$ nicht zur Null convergirt. (Vgl. auch Uebung 1) auf S. 392.)

3. Die zur Convergenz einer unendlichen Reihe nothwendige und hinreichende Bedingung.

Aus dem allgemeinen Satze über die Existenz eines endlichen Grenzwerthes einer complexen Function von n in Nr. 1 ergiebt sich auf dieselbe Weise, wie aus dem entsprechenden Satze über eine reelle Function von n der Satz in IX. 2 folgt, der nachstehende, mit diesem gleichlautende Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$ convergirt, besteht darin, dass jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl μ sich so zuordnen lässt, dass wenn $n > \mu$ ist,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+r}| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2 \cdots) \tag{4}$$

ist, was für eine natürliche Zahl r auch sein mag.[1])

Auch jetzt ist nämlich

$$s_{n+r} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+r}.$$

Zur Convergenz der Reihe (1) ist zwar nach (4) nothwendig, jedoch nicht hinreichend, dass $|a_n|$ bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth Null hat. Eine Reihe, wofür $|a_n|$ bei $\lim n = +\infty$ einen von Null verschiedenen Grenzwerth hat, muss demnach divergiren. Eine solche ist z. B. jede geometrische Reihe, deren Argument dem Betrage nach nicht kleiner als 1 ist.

Wie bereits bemerkt, hat der vorstehende Satz denselben Wortlaut, wie der ihm entsprechende in IX. 2. Das wird Dank der zweckmässigen Ausdehnung des Begriffes „absoluter Betrag“ bei vielen Sätzen dieses Abschnittes zutreffen; selbst die in der reellen Reihentheorie gegebenen Beweise lassen sich zumeist in dem jetzt zu betrachtenden allgemeinen Falle gebrauchen.

---

1) Vgl. Abel, Oeuvres par Lie et Sylow I. p. 221.

4. Allgemeine Sätze über die unendlichen Reihen.

Es bestehen auch für Reihen mit complexen Gliedern die Sätze 1)—6) in IX. 3 und zwar gelten dafür, den zweiten Satz ausgenommen, die nämlichen Beweise. — Im zweiten Satze ist „grösser" in dem Sinne von X. 4 zu verstehen. Der Beweis desselben ergiebt sich sofort, wenn man die Grenzwerthe der beiden darin vorkommenden convergenten Reihen in ihre reellen und imaginären Theile zerlegt.

5. Absolute und relative Convergenz.

Satz.[1]) Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots,$$

worin

$$a_n = \alpha_n + \beta_n i \qquad (n = 0, 1, 2 \cdots)$$

ist, bei jeder Anordnung ihrer Glieder convergirt, besteht in der absoluten Convergenz derselben, d. h. die Reihe der absoluten Beträge ihrer Glieder

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| + \cdots \tag{5}$$

muss convergiren. Dann bietet sie bei jeder Anordnung der Glieder den nämlichen Grenzwerth dar.

Der Satz erscheint als eine unmittelbare Folge des entsprechenden über reelle Reihen in IX. 9, wenn man bedenkt, dass nach (3) auf S. 383

$$\lim_{n=+\infty} s_n = \sum_0^\infty{}^n \alpha_n + i \sum_0^\infty{}^n \beta_n \tag{5*}$$

ist. Soll die Reihe (1) bei jeder Anordnung ihrer Glieder convergiren, so muss dies sowohl von der Reihe ihrer reellen Theile

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots, \tag{6}$$

als auch von der ihrer imaginären Theile, also von der Reihe

$$\beta_0 + \beta_1 + \cdots \tag{6*}$$

gelten. Hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass eine jede von ihnen absolut convergirt.

Wenn aber die Reihen

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots, \quad |\beta_0| + |\beta_1| + \cdots \tag{7}$$

convergiren, so ist die Reihe

$$(|\alpha_0| + |\beta_0|) + (|\alpha_1| + |\beta_1|) + \cdots$$

convergent, somit wegen der Relationen

1) Vgl. Eisenstein, Math. Abhandl. 1847, S. 225.

$$|\alpha_n| + |\beta_n| \geqq \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = |a_n| \qquad (n = 0, 1, 2 \cdots)$$

auch die Reihe (5). Convergirt umgekehrt die Reihe (5), so convergirt wegen der Relationen

$$|a_n| \geqq |\alpha_n| \text{ bezw. } |\beta_n| \qquad (n = 0, 1, 2 \cdots)$$

jede der Reihen (7).

Sind aber die Reihen (7) convergent, so hat sowohl die Reihe (6), als auch (6*) bei jeder Anordnung ihrer Glieder den nämlichen Grenzwerth. Demnach hat zufolge der Formel (5*) auch die Reihe (1) bei jeder Anordnung ihrer Glieder denselben Grenzwerth.

Die Grenzwerthe der absolut convergenten Reihen und nur sie dürfen, wie aus den Sätzen der folgenden Nummer hervorgeht, als Summen ihrer in unbegrenzter Anzahl vorhandenen Glieder angesehen werden. Im Falle dass die absoluten Beträge der Reihenglieder $a_0, a_1 \cdots$ eine divergente Reihe bilden, versteht man unter der Aussage: „die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

convergirt (divergirt)", dass ihre Glieder in der angegebenen, dem Wachsen des Index n entsprechenden Anordnung eine convergente (divergente) Reihe bilden.

Diese Art von Convergenz wird als relative oder bedingte bezeichnet. Die Glieder $a_0, a_1, \cdots$ müssen in dem in Rede stehenden Falle mindestens bei einer Anordnung derselben eine divergente Reihe bilden. Unbedingt divergent heisst eine unendliche Reihe, wenn sie bei jeder Anordnung ihrer Glieder divergent bleibt. Dazu gehören insbesondere jene Reihen, deren allgemeines Glied a_n bei $\lim n = +\infty$ einen von Null verschiedenen Grenzwerth hat.

6. Sätze über die absolut convergenten Reihen.

1) „Wenn die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots \tag{7*}$$

absolut convergirt, so hat man

$$\left|\sum_0^\infty{}^n a_n\right| = \text{oder} < \sum_0^\infty{}^n |a_n|,$$

je nachdem die Glieder sämmtlich die nämliche Anomalie haben oder nicht."

Beweis. Haben alle a_n dieselbe Anomalie, so hat man für jeden Werth von n die Gleichung

$$|s_n| = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|.$$

Daraus folgt bei $\lim n = +\infty$

$$\left|\sum_0^\infty{}^n a_n\right| = \sum_0^\infty{}^n |a_n|.$$

Haben die Glieder a_n nicht alle dieselbe Anomalie, so muss von einem bestimmten Werthe von n, $n = m$, an

$$|s_n| < |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| \; (= \Sigma_n)$$

sein. Daraus folgt bei $\lim n = +\infty$ aber nur, dass

$$\left|\sum_0^\infty{}^n a_n\right| \leqq \sum_0^\infty{}^n |a_n|$$

ist. Setzt man jedoch

$$a_{m+r} + \cdots + a_{m+p} = r_{m,p}$$
$$|a_{m+1}| + \cdots + |a_{m+p}| = \mathrm{P}_{m,p}$$

so dass

$$s_{m+p} = s_m + r_{m,p}, \quad \Sigma_{m+p} = \Sigma_m + \mathrm{P}_{m,p}$$
$$|s_{m+p}| \leqq |s_m| + |r_{m,p}|, \quad |r_{m,p}| \leqq \mathrm{P}_{m,p}$$

ist, so findet man

$$\Sigma_{m+p} - |s_{m+p}| \geqq \Sigma_m - |s_m| + \mathrm{P}_{m,p} - |r_{m,p}|$$
$$\geqq \Sigma_m - |s_m|,$$

somit

$$\lim_{p=+\infty} \Sigma_{m+p} - \left|\lim_{p=+\infty} s_{m+p}\right| > 0,$$

w. z. b. w.

2) „Convergirt neben (7*) die Reihe

$$b_0 + b_1 + \cdots$$

absolut, so convergiren auch die Reihen

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) + \cdots$$

absolut.“

3) „Convergirt die Reihe (7*) absolut und bedeuten $c_0, c_1 \cdots c_n \cdots$ Zahlen, die dem absoluten Betrage nach unter einer positiven Zahl C liegen, so convergirt auch die Reihe

$$a_0 c_0 + a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n + \cdots$$

absolut.“

4) „Hebt man aus einer absolut convergenten Reihe irgend eine endlose Folge von Gliedern hervor, so bilden auch sie eine absolut convergente Reihe.“

5) „Vertheilt man die Glieder einer absolut convergenten Reihe in eine endliche Anzahl von Reihen, so convergiren die unendlichen unter ihnen absolut und es ist die Summe aus ihren Grenzwerthen und den Summen der etwa vorhandenen endlichen Reihen gleich dem Grenzwerthe der Reihe.“

Die Sätze 2)—5) werden genau so wie die entsprechenden in IX. 10 bewiesen.

6) „Vertheilt man die Glieder der absolut convergenten Reihe (7*), deren Grenzwerth $a = \alpha + \beta i$ sei, in unbegrenzt viele Reihen

$$\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \cdots + a_n^{(0)} + \cdots \\ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \cdots + a_n^{(1)} + \cdots \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + \cdots + a_n^{(m)} + \cdots \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \end{array} \tag{8}$$

so convergirt jede unendliche Reihe unter ihnen absolut. Die aus den Summen der endlichen und den Grenzwerthen der unendlichen Reihen in (8)

$$a^{(0)},\ a^{(1)} \cdots a^{(m)} \cdots$$

gebildete unendliche Reihe convergirt absolut und zwar ist ihr Grenzwerth a.“

7) „Convergiren die unendlichen Reihen

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 + \cdots + a_m + \cdots \\ b_0 + b_1 + \cdots + b_n + \cdots \end{array} \tag{9}$$

absolut und sind ihre Grenzwerthe bezw. a, b, so convergirt jede aus den Gliedern a_m, b_n gebildete einfach-unendliche Reihe, wie

$$\begin{array}{l} a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + \cdots \\ \quad + a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_rb_{n-r} + \cdots + a_nb_0 + \cdots, \end{array} \tag{10}$$

absolut und es ist ihr Grenzwerth $a \cdot b$.“

Die beiden letzten Sätze lassen sich vermittelst des Hilfssatzes in IX. 11 ableiten, welcher auch bei complexen Werthen der $a_n^{(m)}$ gilt.

Dieser Satz selbst kann zunächst in ähnlicher Weise wie der Hilfssatz in IX. 6 bewiesen werden. Bequemer ist es indess, ihn durch Zurückführung auf den ersten Satz in IX. 11 zu begründen, indem man die Glieder $a_m^{(n)}$ in ihren reellen und imaginären Bestandtheil zerlegt. Setzt man

$$a_n^{(m)} = \alpha_n^{(m)} + \beta_n^{(m)} i,$$

so bilden die Zahlen $\alpha_n^{(m)}$ einer- und die Zahlen $\beta_n^{(m)}$ andererseits ein Schema, welches die im Hilfssatze von IX. 11 verlangte Eigenschaft besitzt. Mithin convergiren absolut die unendlichen Reihen

$$\sum_0^\infty{}^n \alpha_n^{(m)} \quad \text{und} \quad \sum_0^\infty{}^n \beta_n^{(m)} \qquad (m = 0, 1, \cdots).$$

Sind ihre Summen bezw. $\alpha^{(m)}$, $\beta^{(m)}$, so hat man

$$a^{(m)} = \alpha^{(m)} + \beta^{(m)} i,$$

somit ist, wenn a die Summe der Reihe $\sum a^{(m)}$ bedeutet und $a = \alpha + \beta i$ gesetzt wird,

$$\sum_0^\infty{}^n \alpha^{(m)} = \alpha, \quad \sum_0^\infty{}^n \beta^{(m)} = \beta.$$

Also ist a die Summe der unendlichen Reihe

$$\alpha_0^{(0)} + \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(0)} + \alpha_0^{(2)} + \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(0)} + \cdots,$$

β die der Reihe

$$\beta_0^{(0)} + \beta_0^{(1)} + \beta_1^{(0)} + \beta_0^{(2)} + \beta_1^{(1)} + \beta_2^{(0)} + \cdots$$

und daher $\alpha + \beta i = a$ die der Reihe

$$a_0^{(0)} + a_0^{(1)} + a_1^{(0)} + a_0^{(2)} + a_1^{(1)} + a_2^{(0)} + \cdots.$$

Auf die nämliche Art ergiebt sich die Verallgemeinerung des zweiten Theiles des in Rede stehenden Satzes.

Demnach besteht auch der Cauchy'sche Doppelreihensatz a. a. O. für complexe Werthe der Glieder $a_n^{(m)}$.[1])

Der Satz 7) kann übrigens, indem man die Glieder a_m, b_n und die Grenzwerthe a, b je in ihren reellen und imaginären Bestandtheil zerlegt, unmittelbar aus dem Satze 7) in IX. 10 abgeleitet werden.

7. Entwickelung des Hauptwerthes e^x in eine ganze Potenzreihe. Erklärungen der Functionen $\cos x$ und $\sin x$ für complexe Werthe von x.

Der Satz in IX. 14 bleibt nebst seinem Beweise völlig unverändert, wenn wir unter x eine complexe Zahl und unter e^x den Hauptwerth der Potenz $((e))^x$ verstehen. Demnach besteht für jeden Werth von x die Gleichung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{1}$$

d. h. die Potenzreihe rechts convergirt und zwar absolut für jeden Werth von x und ihre Summe ist e^x.

Aus dieser Formel können wir eine bemerkenswerthe Folgerung ziehen. Nach der Formel (17) auf S. 364 ist, unter η eine reelle Zahl verstanden,

$$e^{\eta i} = \cos\eta + i\sin\eta. \tag{2}$$

Andererseits finden wir, wenn wir in (1) $x = \eta i$ setzen,

$$e^{\eta i} = \left(1 - \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^4}{4!} - \cdots\right) + \left(\eta - \frac{\eta^3}{3!} + \frac{\eta^5}{5!} - \cdots\right) i.$$

Vergleicht man die rechten Seiten dieser und der Gleichung (2), so findet man, dass für jeden reellen Werth η

1) Cauchy, C. d'Analyse p. 547.

$$\cos\eta = 1 - \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{\eta^{2k}}{(2k)!} + \cdots \tag{3}$$

$$\sin\eta = \eta - \frac{\eta^3}{3!} \qquad + \cdots + (-1)^k \frac{\eta^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots \tag{4}$$

ist. Wir haben somit die Entwickelungen der trigonometrischen Functionen $\cos\eta$ und $\sin\eta$ in beständig convergente ganze Potenzreihen gefunden.

Die Reihen auf der rechten Seite der Formeln (3) und (4) sind absolut convergent und bleiben es auch, wenn man η durch eine beliebige complexe Zahl x vom Betrage X ersetzt. Sind sie ja nur Ausschnitte aus der unendlichen Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{X^n}{n!}$. Ihre Summen für ein nicht reelles x sollen uns als die Werthe der Functionen $\cos x$ und $\sin x$ gelten[1]), so dass wir diese Functionen allgemein durch die Formeln

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots \tag{5}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots \tag{6}$$

erklären. Ersetzen wir in (1) x nunmehr durch xi, so erhalten wir mithin die Formel

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x. \tag{7}$$

Schreiben wir aber in (1) anstatt x $-xi$, so ergiebt sich die Formel

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x.$$

Demnach ist

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}. \tag{8}$$

Auch diese Formeln können zur Erklärung der Functionen $\cos x$ und $\sin x$ dienen. Aus ihnen ergeben sich alle Eigenschaften derselben, insbesondere die Gleichung

$$\cos x^2 + \sin x^2 = 1$$

und die Additionstheoreme. Da nämlich

$$e^{(x+y)i} = e^{xi} \cdot e^{yi} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$$
$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y),$$
$$e^{-(x+y)i} = e^{-xi} \cdot e^{-yi}$$
$$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) - i(\sin x \cos y + \cos x \sin y)$$

---

1) Cauchy, C. d'Analyse p. 309.

ist, so findet man vermittelst der Formeln (8), dass

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

ist.

8. Die Sätze über die Potenz und den Logarithmus des Binoms $1+x$ in IX. 15 und 18 lassen sich in nachstehender Form auf complexe Werthe des Exponenten und des Arguments x ausdehnen.

1) „Die binomische Reihe

$$1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + \cdots, \tag{1}$$

worin a jede complexe Zahl sein darf, convergirt absolut für jedes x, dessen Betrag kleiner als 1 ist, und divergirt unbedingt für jedes x, dessen Betrag grösser als 1 ist. Im ersteren Falle ist die Summe der Reihe $(1+x)^a$, d. i. der Hauptwerth der Potenz $((1+x))^a$."

2) „Die logarithmische Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \tag{2}$$

convergirt absolut für jedes x, dessen Betrag kleiner, und divergirt unbedingt für jedes x, dessen Betrag grösser als 1 ist. Im ersteren Falle ist die Summe der Reihe (2) $l(1+x)$, d. i. der Hauptwerth des natürlichen Logarithmus von $1+x$."

Die Beweise dieser beiden Sätze stützen sich jedoch auf den Begriff einer stetigen Function und den der oberen Grenze einer reellen Veränderlichen, so dass wir an dieser Stelle darauf nicht eingehen können. Wir hoffen, auf sie an einem anderen Orte zurückzukommen.[1])

Uebungen zum XIII. Abschnitt.

Zunächst werden die Uebungen 2)—6), 11) und 12) zum IX. Abschnitte unter der Voraussetzung, dass die Zahlen a, b, x, x', y, a_n auch complexe Werthe annehmen dürfen, wiederholt.

1) Setzt man in dem Ausdrucke

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

für x eine complexe Zahl vom Betrage 1 ausser ± 1, nimmt also $x = \cos\theta + i\sin\theta$, wobei θ jeden Werth zwischen $-\pi$ und $+\pi$ ausser 0 erhalten darf, so ergiebt sich eine lineare Function von $\cos(2n+1)\frac{\theta}{2}$ und $\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}$ mit von n unabhängigen Coefficienten.

---

1) Vorläufig sei verwiesen auf Stolz, Vorlesungen über allg. Arithmetik II. S. 204 f.

Daraus kann man, weil die unendliche geometrische Reihe für jeden solchen Werth von x divergirt, schliessen, dass die Functionen $\cos(2n+1)\frac{\theta}{2}$ und $\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth nicht besitzen.

[Unmittelbar ergiebt sich freilich nur, dass wenigstens eine der beiden Functionen ohne Grenzwerth ist. Nimmt man aber an, dass eine, z. B. die erstere einen endlichen Grenzwerth bei $\lim n = +\infty$ hat, so müsste auch $\left(\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}\right)^2$ einen haben, folglich $\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}$ selbst mindestens bei $\lim n' = +\infty$, wo die Zahlen n' einen Theil der natürlichen Zahlen n bilden. Dies ist aber unmöglich, da auch die Reihe aus den Gliedern $x^{n'+1} + x^{n'+2} + \cdots + x^{n''}$, wo n'' die auf n' in der Reihe der Zahlen n' folgende Zahl bedeutet, divergirt.]

Hat θ ein rationales Verhältniss zu π, so erkennt man die Richtigkeit der letzten Behauptung ohne Mühe unmittelbar an den erwähnten Functionen selbst.

2) Man zeige, dass die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \cdots + \frac{1}{n^a} + \cdots$$

absolut convergirt, wenn der reelle Theil der complexen Zahl a grösser als 1 ist.

3) Verallgemeinerung des in Uebung 10) auf S. 272 angeführten Doppelsatzes. „Wenn die aus complexen Zahlen bestehende Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$ convergirt und die reellen Zahlen $\beta_0, \beta_1 \cdots \beta_n \cdots$ bei wachsendem n dem endlichen Grenzwerthe β in einem Sinne sich nähern — oder wenn der absolute Betrag der Partialsumme

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

eine endliche Function von n ist und die Zahlen $\beta_0, \beta_1 \cdots \beta_n \cdots$ sich bei $\lim n = +\infty$ in einem Sinne dem Grenzwerthe Null nähern, so convergirt die unendliche Reihe

$$a_0\beta_0 + a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n + \cdots."$$

(Dirichlet, Zahlentheorie 4. Aufl. S. 376.)

4) Der Satz in IX. 13 über eine ganze Potenzreihe ohne constantes Glied gilt nebst seinem Beweise auch für complexe Werthe von x und den Coefficienten a_n.

5) Der absolute Betrag des Binominalcoefficienten

$$\binom{a}{n} = (-1)^n \prod_{r=1}^{n} \left\{1 - \frac{a+1}{r}\right\} \qquad (\alpha)$$

hat bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwerth 0 oder einen von 0 verschiedenen endlichen Grenzwerth oder den Grenzwerth $+\infty$, je nachdem der reelle Theil des Exponenten a grösser, gleich oder kleiner als -1 ist. — Im ersten Falle ist demnach

$$\lim_{n=+\infty} \binom{a}{n} = 0.$$

6) Der Binominalcoefficient $\binom{-1+\beta i}{n}$, wo β eine von Null verschiedene reelle Zahl sein soll, hat bei $\lim n = +\infty$ keinen Grenzwerth. — Lässt sich zeigen, indem man die nunmehr in (α) erscheinenden Factoren $1 - \frac{\beta i}{r}$ auf die trigonometrische Form bringt.

7) Es gilt auch bei complexem a die Formel

$$\sum_0^n {}_s (-1)^s \binom{a}{s} = (-1)^n \binom{a-1}{n}. \qquad (\beta)$$

Beweis durch den Schluss von n und $n+1$, wie bei der Formel (11) auf S. 262.

8) Aus der Formel (β) schliesst man, dass die unendliche Reihe

$$\sum_0^\infty {}_s (-1)^s \binom{a}{s}$$

convergirt oder divergirt, je nachdem der reelle Theil von a positiv ist oder nicht. Und zwar ist im ersteren Falle ihr Grenzwerth 0.

9) Ist $x = \xi + \eta i$, so ist

$$l(\cos x + i \sin x) = xi + 2k\pi i,$$

wo die ganze Zahl k so zu bestimmen ist, dass $-\pi < \xi + 2k\pi \leqq \pi$ ist. Demnach ist bei beliebigem, reellen oder complexen m

$$(\cos x + i \sin x)^m = (\cos mx + i \sin mx)\, e^{2mk\pi i}$$

(Verallgemeinerung der Moivre'schen Formel in XII. 1).

10) Ist wie S. 381 und 382

$$f(n) = \varphi(n) + \psi(n) i = \varrho(n)\{\cos\theta(n) + i \sin\theta(n)\}$$

und haben $\varphi(n)$, $\psi(n)$ bei $\lim n = +\infty$ endliche Grenzwerthe α, β, so ist

$$\lim_{n=+\infty} \varrho(n) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \lim_{n=+\infty} \theta(n) = \theta,$$

wobei der zwischen $-\pi$ und π gelegene Winkel θ durch die Gleichungen

$$\cos\theta = \alpha : \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \sin\theta = \beta : \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

bestimmt ist. — Man setze $\theta(n) - \theta = \vartheta(n)$, bilde $\cos\vartheta(n)$ und $\sin\vartheta(n)$ und zeige wie S. 362, dass $\lim \vartheta(n) = 0$ ist.

Berichtigungen und Nachträge.

S. 3, zu Nr. 3. Ein weiteres Beispiel einer unzulässigen Gleichheitserklärung s. S. 135 Uebung 1).

S. 4, zu Nr. 4. Nicht jede Zuordnung einer unter den Grössen a, b, $c \cdots$ zu jedem Paare derselben kann als eine Verknüpfung der beiden letzteren Grössen bezeichnet werden, vgl. den Nachtrag zu S. 95.

S. 7, Z. 1. Es erscheint als sachgemäss die Forderung 5) auf die gewöhnliche Arithmetik und die den dort behandelten am nächsten stehenden Grössensysteme zu beschränken. Kommen ja schon in diesem Werke Grössensysteme vor, welche die Forderung 5) nicht befriedigen, nämlich die S. 97 unter 3. 4) und 5) erwähnten und ein S. 102 erklärtes System.

S. 8, Fussnote 1) Z. 2. Statt „der" lies „die".

S. 13, Z. 26. Nach „heisst" schalte ein „nur". — L. Z. statt „Bernoulli" lies „Pascal" (nach dem Formulaire de Mathématiques de l'an 1901, S. 41).

S. 17, Z. 12. Statt 4) lies 3).

S. 22. Nach v. Dantscher lässt sich die Gleichung 3) des associativen Gesetzes auch aus der ersten der distributiven Formeln 2) und der Formel $1 \cdot b = b \cdot 1 = b$ durch den Schluss von a auf $a + 1$ ableiten. Zunächst ist

$$(1 \cdot b) \cdot c = (b \cdot 1) \cdot c = b \cdot c = 1 \cdot (b \cdot c).$$

Weiter folgt, wenn 3) als richtig gilt,

$$[(a+1) \cdot b] \cdot c = [a \cdot b + b] \cdot c = (a \cdot b) \cdot c + b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) + 1 \cdot (b \cdot c)$$
$$= (a+1) \cdot (b \cdot c).$$

S. 28, Z. 26. Die Null bedarf als Zahl noch der Erklärung. Sie findet sich auf S. 77: „Null ist die der 1 vorangehende Zahl". Die Voraussetzung 2) im T. lässt sich zurückführen auf die Annahmen: $1 = 0 + 1$, $0 + 0 = 0$ und die Formel 5) a. a. O.

S. 51, Z. 4 v. u. füge zu: „natürlich beschränkt auf solche Paare (a, b), dass die Gleichung $b \circ x = a$ nach x keine Lösung im Systeme (I) zulässt."

S. 60, Z. 6. Die Sätze 4) und 5) sind zu vertauschen. — Z. 15. Statt III lies III_1.

S. 68, Z. 12—8 v. u. Der Satz III_1 liefert die erwähnten Regeln nur für die von Null verschiedenen rationalen Zahlen. Rechnet man die Null dazu, so hat man bezüglich dieser Regeln auf den Satz III in Nr. 3 zurückzugehen. Sie gelten natürlich nicht mehr, wenn darin Quotienten mit dem Nenner 0 auftreten. Der Satz 3) und der zweite Theil des Satzes 4) auf S. 43 bestehen auch nicht mehr. Denn es ist $0 \cdot B = 0 \cdot B'$ und $0 : B = 0 : B'$, was auch die Zahlen B und B' sein mögen, wenn nur keine von ihnen Null ist.

S. 74, Z. 23. Statt „Nenner 1" lies „Nenner b".

Der Anfang von Nr. 1 bedarf einer Erläuterung und lässt sich auch etwas vereinfachen. Wir ordnen aus der Reihe der natürlichen Zahlen den Viel-

fachen einer gegebenen Zahl b d. i. den Zahlen $b, 2b \cdots ab \cdots$ bezw. die Zahlen $1, 2 \cdots a \cdots$ zu und den übrigen neue Dinge, welche wir eigentliche Brüche nennen und nach einander mit

$$1/b,\ 2/b \cdots \frac{b-1}{b},\quad \frac{b+1}{b} \cdots \frac{a}{b} \cdots \tag{1}$$

bezeichnen. Die natürlichen Zahlen selbst sehen wir als uneigentliche Brüche an und setzen demgemäss

$$1 = b/b, \quad a = ab/b. \tag{2}$$

1. Erklärung. „Zwei Brüche mit demselben Nenner b heissen dann und nur dann einander gleich, wenn sie den nämlichen Zähler haben. Von zwei solchen Brüchen heisst grösser derjenige, welcher den grössern Zähler hat."

Anstatt wie es im T. durch die Formeln 1) und 2) geschieht, zuerst die Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl zu erklären, scheint es näherliegend mit der Addition der Brüche mit dem nämlichen Nenner b zu beginnen.

2. Erklärung. Es sei die Summe zweier solcher Brüche

$$a/b + a'/b = (a + a')/b. \tag{3}$$

Für diese Addition bestehen dieselben Gesetze, wie für jene der natürlichen Zahlen (S. 60). Auch ist die Subtraction stets möglich und eindeutig, wenn der Zähler des Minuends grösser als der des Subtrahends ist. Man hat nun nach (3) und (2) die Gleichungen

$$\overset{1}{\smile}\!\!1/b + \overset{2}{\smile}\!\!1/b + \cdots + \overset{b}{\smile}\!\!1/b = b/b = 1 \tag{4}$$

$$\overset{1}{\smile}\!\!a/b + \overset{2}{\smile}\!\!a/b + \cdots + \overset{b}{\smile}\!\!a/b = ab/b = a. \tag{5}$$

Zufolge der ersteren heisst der Stammbruch $1/b$ der b^{te} Theil der Einheit 1 und der Bruch a/b der b^{te} Theil der Zahl a.

Bedeutet b' ebenfalls eine natürliche Zahl grösser als 1, so haben wir entsprechend der Formel (5)

$$\frac{\overset{1}{\smile}\!\!b'}{bb'} + \frac{\overset{2}{\smile}\!\!b'}{bb'} + \cdots + \frac{\overset{b}{\smile}\!\!b'}{bb'} = \frac{bb'}{bb'} = 1 \tag{6}$$

$$\frac{\overset{1}{\smile}\!\!ab'}{bb'} + \frac{\overset{2}{\smile}\!\!ab'}{bb'} + \cdots + \frac{\overset{b}{\smile}\!\!ab'}{bb'} = \frac{abb'}{bb'} = a. \tag{7}$$

Erklären wir nun alle b^{ten} Theile einer jeden natürlichen Zahl einander gleich (3. Erklärung), so ergiebt sich aus (4) und (6) einer-, aus (5) und (7) andererseits, dass

$$\frac{1}{b} = \frac{b'}{bb'}, \quad \frac{a}{b} = \frac{ab'}{bb'}.$$

Nun kann der Text von Z. 13 an folgen. Die Formeln 1), 2) sowie der Absatz 3) S. 75 sind als Erklärungen des Productes eines Bruches mit einer ganzen Zahl nach Nr. 2 zu versetzen. Dorthin gehört also auch die Bemerkung, dass der Quotient $1 : b$ gleich dem Bruche $1/b$ ist.

S. 81, Z. 2—7. Hierzu ist eine ähnliche Bemerkung wie zu S. 74 zu machen. Der Zahl $-a$ wird der „Bruch" $\frac{-a}{b}$ zugeordnet u. s. w.

S. 91, Z. 11 v. u. Zusatz. „Zu der in Rede stehenden Zahlenreihe $c_0, c_1, c_2 \cdots$ gehört nur ein erzeugender Bruch.“ Er wird indirect bewiesen. Angenommen, es gehöre zu ihr ausser dem Bruche A in (5) noch ein anderer A', so liegt sowohl A, als auch A' zwischen den Zahlen S_n und $S_n + 1 : e^n$ bei beliebigem n. Wäre $A' > A$, so wäre $A' - A$ eine absolute rationale Zahl ε. Zufolge des soeben Bemerkten ist $A' - A < 1 : e^n$. Nun giebt es (S. 92) solche natürliche Zahlen n, dass $1 : e^n < \varepsilon$ ist. Es wäre also $A' - A < \varepsilon$ und nicht gleich ε. Also kann A' nicht grösser als A sein. Ebenso wenig kann $A' < A$ sein. Folglich muss $A' = A$ sein.

S. 93, zur Uebung 1). Etwas bequemer ist die Beziehung

$$\frac{a}{b} \leqq \left[\frac{a}{b}\right] + 1 - \frac{1}{b}.$$

S. 95, Zusatz zu Z. 25. 12) „Ordnet man je zweien Brüchen a/b, c/d den Bruch

$$\frac{a+c}{b+d}$$

zu, so hat man eine Zuordnung, die nicht als eine Verknüpfung von ihnen im Sinne von I. 4 angesehen werden kann. Denn der dritte Bruch ändert sich im Allgemeinen, wenn man einen von den beiden ersteren durch einen ihm gleichen ersetzt.“ (Nach Peano vgl. Couturat, L'enseignement mathématique II. p. 402). Wäre die Gleichheit a/b, a'/b' durch die Bedingung $a + b = a' + b'$ erklärt, so würde die in Rede stehende Zuordnung als Verknüpfung erscheinen. Es hätte jedoch keinen Sinn, daneben den Bruch $a/1$ der Zahl a gleichzusetzen.

13) „Es sei $a/b = a'/b'$, wenn $F(a, b') = F(a', b)$ ist. Die Function $F(a, b')$ ist so zu wählen, dass der Grundsatz 3) S. 2 nicht erfüllt ist.“

14) Es sei $a/b = a'/b'$, falls $2a + b = 2a' + b'$ ist. Für diese neuen Brüche sei

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{2(a+c)}{b+d}.$$

Man untersuche die Eigenschaften dieser Addition.

Z. 4 v. u. Eine ausführliche Erörterung über das Fourier'sche Divisionsverfahren findet sich bei Lüroth, Numerisches Rechnen S. 38 f.

S. 97, Z. 3 v. u. Statt „congruent“ lies „nicht-congruent“. — Z. 2 v. u. Nach „Zahlen“ füge bei: „(Null eingeschlossen)“.

S. 98, Z. 16 f. Will man in der Uebung 5) ein die Forderung 5) auf S. 7 erfüllendes Zahlensystem haben, so braucht man daran nur Nachstehendes zu ändern. 2) Falls $a + c = b$ ist, sei $(a, b) + c = 1$; 3) falls $a + c < b$ ist, sei $(a, b) + c = 0$. Gemäss dieser Erklärungen hat die Gleichung $x + b = 1$, wo b jede natürliche Zahl sein darf, neben der Lösung $x = (1, b)$ noch die davon verschiedene $x = (1, b + 1)$.

NB. Die Gleichung $x + (b - a) = 0$ $(a < b)$ hat jetzt unendlich viele Lösungen, indem man $x = (a', b')$ setzen darf, wenn nur a', b' so gewählt sind, dass $a' < b'$ und $a' + b < a + b'$ ist.

S. 103, Satz 6). Statt $\equiv$ lies $=$.

S. 108, l. Z. des Textes füge zu: G. Veronese, Elementi di Geometria. 2 parti. 1900. — F. Schur, Math. Ann. Bd. 55, S. 265 f.

Note 2). Statt „Der Gedanke“ lies „Den Gedanken“.

S. 110, Note 1) füge zu: Vgl. G. Veronese a. a. O. II. S. 77.

S. 113, Z. 6. Nach „und“ schalte ein „bei“. — Z. 8 v. u. Statt „parallele“ lies „Parallele“.

S. 115, Note füge bei: E. v. Huntington giebt in den Transact. of the American math. soc. V. 3, S. 264 eine weitere Verminderung der zur Erklärung der stetigen absoluten Grössen nothwendigen und hinreichenden Postulate an.

S. 122. Einen anderen Beweis des Satzes in Z. 6 f. giebt Hill (Cambridge Phil. Transact. XIX. 2, S. 162).

S. 135, Z. 22. Statt S. lies §. — Z. 23. Statt „Geraden" lies „Halbstrahlen". — Z. 29 lies „die gleichgerichteten Parallelen".

S. 137 füge zu: 18) A. Kneser gründet in dem dem Archiv für Math. 3. R. 2. Bd. beigelegten ersten Stücke der Sitzungsberichte der Berliner math. Gesellschaft (S. 3 f.) die Proportions- und Aehnlichkeitslehre auf die folgende Erklärung: „Die Streckenverhältnisse $A:B$ und $A':B'$ seien einander gleich, wenn in den aus den Katheten $A\ B$ einer- und $A'\ B'$ andererseits construirten rechtwinkligen Dreiecken den gleichlautenden Seiten (AA' bezw. BB') gleiche Winkel gegenüberliegen." Warum ist diese Erklärung zulässig und wie lautet jetzt die Erklärung des grösseren Verhältnisses?

S. 170, Z. 13 v. u. füge bei: „Von jeder für die Werthe $n = 0, 1 \cdots$ nichtendlichen Function F_n, welche also dafür entweder die obere Grenze $+\infty$ oder die untere $-\infty$ hat, sagt man auch, sie habe diese Grenze bei $\lim n = +\infty$."

S. 173, l. Z. „kleiner" und „grösser" sind zu vertauschen.

S. 177, Z. 19. Um die reellen Zahlen ohne vorhergehende geometrische Erklärung des Products zweier Strecken in die Geometrie einzuführen, bedarf man gerade der Sätze 1)—5) S. 173 f.

S. 182. Nach 11) schalte die Uebung ein: „Man beweise aus den Ungleichungen (d) S. 175 direct den Satz, dass, wenn den Strecken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bezüglich der Einheit E die Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ entsprechen, dann der Strecke $\mathfrak{A}$ gegenüber der Einheit $\mathfrak{B}$ die Zahl $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ zukommt."

S. 213, Note 2) füge bei: $a^x = e^{x l a}$.

S. 215, Z. 21 f. Will man die Ungleichung (8) ohne Benutzung von Potenzen mit nicht-ganzem Exponenten beweisen, so gebe man mit Schlömilch (Compendium I. S. 10) der Formel 3) S. 186 die Gestalt

$$a^n > b^{n-1}\{b + n(a-b)\}$$

und setze

$$a = 1 + \frac{x}{n}, \quad b = 1 + \frac{x}{n-1}.$$

Aus (8) S. 216 folgt dann (7) und hieraus durch die Bemerkung, dass

$$1 + \frac{x}{n} < 1 : \left(1 - \frac{x}{n}\right)$$

ist, die Formel (9). — Vgl. auch Wulf a. a. O.

S. 216, Note 2). Statt „seinen Beweisen" lies „seinem Beweise".

S. 238, Z. 13 füge zu: Aus dem Satze 1) folgt, dass die Reihe $a_0 + a_1 + \cdot$ divergirt, wenn aus ihr sich eine unendliche Folge von Gliedern (1*) herausheben lässt, welche eine divergente Reihe bilden."

S. 258, Z. 3 v. u. Statt $n!$ lies in Formel (6) $r!$.

S. 264, Z. 4 v. u. Statt c^2 lies c.

S. 292, Z. 22. Statt $|a| - |a'|^2$ lies $\{|a| - |a'|\}^2$.

S. 349, Z. 8. Statt „die Längeneinheit .... ist" lies „man die drei letzten Glieder dieser Proportion durch die dritte Zahl dividiren kann."

S. 350. In der zweiten der Formeln (1) lies $\overline{AB} \sin x\widehat{\ }c$ statt $\overline{BC} \sin \widehat{xc}$.

S. 353, Formel (8), 2. Zeile soll stehen: $\sin m\alpha = m \cos \alpha^{m-1} \sin \alpha -$ u. s. w.

Sachenverzeichniss.

(Die Zahlen bedeuten die Seiten. — N. = Note).

